UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

JULLIANO ROSA NASCIMENTO

# Problema de Particionamento em Subgrafos Complementares: Complexidade e Convexidade

Goiânia
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico**: **[ ] Dissertação** **[ X ] Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

Nome completo do autor: Julliano Rosa Nascimento

Título do trabalho: Problema de Particionamento em Subgrafos Complementares: Complexidade e Convexidade

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento [ X ] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2] Data: 18 /10 /2019

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

JULLIANO ROSA NASCIMENTO

# Problema de Particionamento em Subgrafos Complementares: Complexidade e Convexidade

Tese apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

**Área de concentração:** Ciência da Computação.

**Orientadora:** Profa. Dra. Diane Castonguay

**Coorientadora:** Profa. Dra. Erika Morais Martins Coelho

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Nascimento, Julliano Rosa
Problema de Particionamento em Subgrafos Complementares: Complexidade e Convexidade [manuscrito] / Julliano Rosa Nascimento. - 2019.
CXXIX, 129 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Diane Castonguay; co-orientadora Dra. Erika Morais Martins Coelho.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Informática (INF), Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Goiânia, 2019.
Bibliografia.
Inclui tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Particionamento de grafos. 2. Subgrafos complementares. 3. Isomorfismo de grafos. 4. Convexidade geodética. 5. Prismas complementares. I. Castonguay, Diane, orient. II. Título.

CDU 004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE INFORMÁTICA

# ATA DE DEFESA DE TESE

Ata Nº **04/2019** da sessão de Defesa de Tese de **Julliano Rosa Nascimento** que confere o título de Doutor em Ciência da Computação, na área de concentração em Ciência da Computação.

Aos onze dias do mês de novembro de dois mil e dezenove, a partir das catorze horas e trinta minutos, na sala 257 do Instituto de Informática, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada **"Problema de Particionamento em Subgrafos Complementares: Complexidade e Convexidade"**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Diane Castonguay (INF/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Márcia Rodrigues Cappelle Santana (INF/UFG), membra titular externa ao Programa, Professor Doutor Fábio Protti (IC/UFF), membro titular externo à Instituição, cuja participação ocorreu através de videoconferência; Professor Doutor Jayme Luiz Szwarcfiter (COPPE/UFRJ), membro titular externo à Instituição, Professora Doutora Érika Morais Martins Coelho (INF/UFG), membra titular externa ao Programa, coorientadora, e Professor Doutor Leizer de Lima Pinto (INF/UFG), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Diane Castonguay, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos onze dias do mês de novembro de dois mil e dezenove.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Fábio Protti**, **Usuário Externo**, em 11/11/2019, às 16:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Diane Castonguay**, **Professora do Magistério Superior**, em 11/11/2019, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Leizer De Lima Pinto**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/11/2019, às 16:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Erika Morais Martins Coelho**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/11/2019, às 16:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jayme Luiz Szwarcfiter**, **Usuário Externo**, em 11/11/2019, às 16:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Márcia Rodrigues Cappelle Santana**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/11/2019, às 16:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0972495** e o código CRC **ABE5A678**.

**Referência:** Processo nº 23070.039490/2019-24 SEI nº 0972495

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Julliano Rosa Nascimento**

Graduou-se em Engenharia de Software na Universidade Federal de Goiás (UFG). Durante sua graduação, foi monitor de Matemática Discreta e bolsista de iniciação científica pelo CNPq. No Mestrado, também na UFG, foi bolsista da CAPES e trabalhou sobre Convexidade em Grafos. Durante o doutorado, foi bolsista da CAPES/FAPEG e foi professor substituto no Instituto de Informática da UFG. Além disso, realizou doutorado sanduíche na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), em parceria com a Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) e a Universidade Federal Fluminense (UFF).

Ao meu companheiro Rafael Dias Correa Nascimento, que sempre me encorajou a lutar, enfrentar os meus medos e não desistir de meus objetivos.

# Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida.

Ao meu companheiro Rafael Dias Correa Nascimento por ser esta pessoa tão generosa. Por ter se abdicado diversas vezes de seus sonhos para que pudesse me acompanhar em minhas decisões. Pelas inúmeras vezes que não o deixei dormir para que eu pudesse estudar com as luzes acesas durante a madrugada.

Aos meus familiares, em especial Jacqueline, Deusimar, Matheus, Maria José, Joelma e Ronildo, por sempre acreditarem no meu potencial e por entenderem a minha ausência tantas vezes durante a trajetória do doutorado.

A minha orientadora Diane, pela disponibilidade em me orientar. Pelas inúmeras correções de texto, pela ajuda com a escrita matemática, pelas diversas vezes que foi necessário trabalhar em algo que não estava bem e ela esteve lá para dizer: vamos juntos!

Aos meus coorientadores, Erika e Hebert, por sempre me incentivarem, pelas sugestões de temas de trabalho e pelas variadas contribuições nos algoritmos e nos teoremas.

Aos meus amigos professores Elisângela, Márcia e Daniel e aos meus colegas de doutorado pelos grandes encorajamentos, apoio em disciplinas e estudos orientados.

Aos meus orientadores do doutorado sanduíche, Fabiano, Jayme e Uéverton, pelas inúmeras contribuições e discussões proveitosas sobre os mais variados temas, não somente relacionados à tese. Pelas muitas vezes que eles conseguiram entender as minhas ideias ainda mal formalizadas e transformá-las em algo relevante!

Aos amigos do Rio de Janeiro. Em especial Shayenne, pelo amparo dado na minha temporada de estudos fora. Letícia e Mário por terem me acolhido e recebido tão bem em sua casa, pelos inúmeros convites de saídas que eu infelizmente recusei para ficar estudando. O carinho deles foi incomensurável!

A todos os integrantes do Instituto de Informática, que direta ou indiretamente participaram desta jornada. Especialmente à Mirian e Mariana Rodrigues, pela disponibilidade em atender assuntos relacionados à secretaria.

À banca examinadora, por ter aceitado o convite para participar da avaliação deste trabalho.

À CAPES/FAPEG, pelo apoio financeiro.

“A ciência nunca resolve um problema sem criar pelo menos outros dez.”

**George Bernard Shaw**.

# Resumo

Nascimento, Julliano Rosa. **Problema de Particionamento em Subgrafos Complementares: Complexidade e Convexidade**. Goiânia, 2019. 129p. Tese de Doutorado. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Nesta tese, introduzimos o problema PARTIÇÃO EM SUBGRAFOS COMPLEMENTARES (COMP-SUB($\Pi$)), que recebe como entrada um grafo $H$ e uma propriedade de arestas $\Pi$, e o objetivo é determinar se existe uma decomposição do grafo $H$ em subgrafos complementares $G$ e $\overline{G}$ tal que o conjunto de arestas $M$ entre $G$ e $\overline{G}$ satisfaça a propriedade $\Pi$. COMP-SUB($\Pi$) generaliza o problema de reconhecimento dos prismas complementares, que é o caso quando $\Pi$ é um emparelhamento perfeito entre vértices correspondentes de $G$ e $\overline{G}$. Para $\Pi$ uma propriedade arbitrária, mostramos resultados para grafos livres de $k$-clique ou $k$-conjunto independente. Sobre a propriedade $\Pi_\emptyset$ que considera $M = \emptyset$, mostramos que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) é GI-completo para grafos cordais, mas pode ser resolvido eficientemente para grafos de permutação, comparabilidade, co-comparabilidade e co-intervalo. Além disso, obtemos caracterizações para algumas subclasses de grafos cordais. Também obtemos resultados considerando $\Pi_{K_{n,n}}$, o caso em que $M$ possui todas as arestas possíveis entre $G$ e $\overline{G}$ e para $\Pi_{\text{PERF}}$, o caso que considera $M$ como um emparelhamento perfeito. Em particular, mostramos que o problema COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) é GI-difícil e obtemos caracterizações para este problema quando o grafo $H$ de entrada é um cografo, grafo cordal ou distância-hereditária. Por outro lado, também abordamos nesta tese três parâmetros da convexidade geodética para prismas complementares: o número envoltório, o número geodético e o número de convexidade. Obtemos resultados sobre o número envoltório para prismas complementares $G\overline{G}$ quando ambos $G$ e $\overline{G}$ são conexos. Sobre o segundo e o terceiro parâmetro, mostramos que seus problemas de decisão são NP-completos mesmo restritos aos prismas complementares. Além disso, estabelecemos limites inferiores do número geodético de $G\overline{G}$ quando $G$ ou $\overline{G}$ possuem vértices simpliciais e determinamos o número de convexidade de $G\overline{G}$ quando $G$ é desconexo ou $G$ é um cografo.

**Palavras–chave**

Particionamento de grafos, Subgrafos complementares, Isomorfismo de grafos, Convexidade geodética, Prismas complementares.

# Abstract

Nascimento, Julliano Rosa. **Partition Into Complementary Subgraphs Problem: Complexity and Convexity**. Goiânia, 2019. 129p. PhD. Thesis. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we introduce the PARTITION INTO COMPLEMENTARY SUBGRAPHS (COMP-SUB($\Pi$)) problem, which receives as input a graph $H$ and an edge set property $\Pi$, and the goal is determining whether is possible to decompose the graph $H$ into complementary subgraphs $G$ and $\overline{G}$ such that the edge set $M$ between $G$ and $\overline{G}$ satisfies property $\Pi$. COMP-SUB($\Pi$) generalizes the recognition of complementary prisms problem, which is the case when $\Pi$ is a perfect matching between corresponding vertices of $G$ and $\overline{G}$. When $\Pi$ is arbitrary, we show results for $k$-clique or $k$-independent set free graphs. On property $\Pi_\emptyset$ which considers $M = \emptyset$, we show that COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) is GI-complete for chordal graphs, but can be solved efficiently for permutation, comparability, co-comparability and co-interval graphs. Furthermore, we obtain characterizations for some subclasses of chordal graphs. We also obtain results for $\Pi_{K_{n,n}}$, the case when $M$ has all the possible edges between $G$ and $\overline{G}$ and for $\Pi_{\text{PERF}}$, the case which considers $M$ as a perfect matching. In particular, we show that COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) problem is GI-hard, and we obtain characterizations for this problem when the input graph $H$ is a cograph, a chordal or a distance-hereditary graph. On the other hand, we address three parameters of the geodetic convexity for complementary prisms: the hull number, the geodetic number and the convexity number. We obtain results on the hull number for complementary prisms $G\overline{G}$ when both $G$ e $\overline{G}$ are connected. On the second and third parameter, we show that the decision problems related to the geodetic number and convexity number are NP-complete even restricted to complementary prisms. We also establish lower bounds on the geodetic number for $G\overline{G}$ when $G$ or $\overline{G}$ have simplicial vertices and we determine the convexity number for $G\overline{G}$ when $G$ is disconnected, or $G$ is a cograph.

**Keywords**

Graph partitioning, Complementary subgraphs, Graph isomorphism, Geodetic convexity, Complementary prisms.

# Sumário


Lista de Figuras **14**

Lista de Tabelas **17**

Lista de Algoritmos **18**

1 Introdução **19**

2 Conceitos Preliminares **23**
- 2.1 Sobre Grafos 23
- 2.2 Sobre Grafos *Split* 31
- 2.3 Sobre Operações entre Grafos 33

3 Partição em Subgrafos Complementares **36**
- 3.1 Quando $M$ é vazio 39
  - 3.1.1 Grafos Fortemente Cordais 44
  - 3.1.2 Grafos de Intervalo Unitário 51
  - 3.1.3 Grafos *Starlike* 54
  - 3.1.4 Grafos Bloco 55
  - 3.1.5 Grafos *Split* 57
- 3.2 Quando $M$ induz um grafo bipartido completo 57
- 3.3 Quando $M$ é um emparelhamento perfeito 58

4 Fundamentos Sobre Convexidades **73**
- 4.1 Convexidades Abstratas 73
- 4.2 Convexidades em Grafos 74

5 Convexidade Geodética em COMP-SUB$(\Pi)$ **80**

6 O Número Envoltório Geodético para Prismas Complementares **83**
- 6.1 Prismas Complementares de Grafos Gerais e de Grafos Não *Split* 84
- 6.2 Prismas Complementares de Grafos *Split* 88

7 O Número Geodético para Prismas Complementares **101**

8 O Número de Convexidade Geodética para Prismas Complementares **107**

9 Conclusões e Trabalhos Futuros **116**

Referências Bibliográficas **119**

# Lista de Figuras


2.1 Alguns exemplos de classes de grafos. Fonte: [90]. 26
(a) Um caminho $P_3$. 26
(b) Um ciclo $C_4$. 26
(c) Um grafo completo $K_5$. 26
(d) Uma estrela $S_4$. 26
(e) Uma árvore $T$. 26
2.2 Cografo $G$ e $\overline{G}$. Fonte: [29]. 27
(a) Componentes conexas do grafo $\overline{G}$. 27
(b) Componentes conexas do grafo $G$. 27
2.3 Mais exemplos de grafos. 28
2.4 Um grafo de comparabilidade e de intervalo, uma de suas orientações transitivas e um de seus modelos de intervalo. 28
2.5 Subgrafos proibidos em um grafo distância-hereditária. 29
2.6 Dois subgrafos proibidos de um grafo *starlike*. 29
2.7 Exemplo de partições *split*. 31
2.8 Grafos que exemplificam os três tipos de partições *split* consideradas. 32
2.9 Exemplos de prismas complementares. Fonte: [90]. 34
(a) Prisma complementar do grafo $C_6$. 34
(b) Prisma complementar do grafo $K_4$. 34
2.10 Produto complementar $G(R)\square H(S)$, com $R = \{u_1, u_3\}$ e $S = \{v_1, v_3\}$. Fonte: [90]. 34

3.1 Uma *net* induzida em um $sun_5$. 44
3.2 Dois subgrafos proibidos de um grafo *split* permutação. 45
3.3 Um *co-rising sun* $H$ e seu grafo de conflito $H^*$. 47
3.4 Grafo $\mathcal{K}_{5,5}$ com respectivo vetor de conflito $\nu = [2,2,2,2,2]$. 48
3.5 Casos que exemplificam as funções do Lema 3.19 e a adição de arestas do tipo não-corda. 50
(a) $\nu_1$ = [0,0,0,0,1] 50
(b) $f(\nu_1) = [1,1,1,1,0]$ 50
(c) $g(\nu_1) = [1,0,0,0,0]$ 50
(d) $f(g(\nu_1)) = [0,1,1,1,1]$ 50
(e) $\nu_2$ = [0,0,2,0,2] 50
3.6 Subgrafos proibidos em $\mathcal{X}(C_5)$. 52
(a) 00000 52
(b) 00010 52
(c) 00011 52
(d) 00100 52

(e) 00101 52
(f) 00110 52
(g) 01001 52
(h) 01010 52
(i) 01110 52
3.7 Emparelhamentos perfeitos de corte podem não ser únicos. 59
3.8 Grafo $H_3$. 60
3.9 Construção utilizada para a prova do Teorema 3.41. 63
3.10 Representação do grafo $G$ de vértices não identificados (em cinza). 68

4.1 Exemplos de conjuntos convexos em diferentes convexidades de caminhos. Fonte: [90]. 76
(a) Conjunto convexo geodético. 76
(b) Conjunto convexo monofônico. 76
(c) Conjunto $P_3$-convexo. 76
(d) Conjunto convexo triangular. 76
(e) Conjunto $m^3$-convexo. 76
(f) Conjunto convexo todos os caminhos. 76
4.2 Exemplos de conjuntos convexos em convexidades que não são de caminhos. Fonte: [90]. 77
(a) Conjunto $st$-convexo. 77
(b) Conjunto 3-convexo. 77
(c) Conjunto 5-convexo. 77
4.3 Exemplo de execução da operação de intervalo na convexidade geodética. Fonte: [90]. 78
(a) Conjunto $S$. 78
(b) Conjunto $I[S]$. 78
(c) Conjunto $I^2[S]$. 78
(d) Conjunto $I^3[S]$. 78
4.4 Exemplo de conjunto geodético e conjunto convexo próprio em $G$. 79
(a) Conjunto geodético de $G$. 79
(b) Conjunto convexo próprio de $G$. 79

6.1 Exemplos de prismas complementares $G\overline{G}$ satisfazendo $h(G\overline{G}) \leq 3$. 86
(a) $h(G\overline{G}) = 2$. 86
(b) $h(G\overline{G}) = 3$. 86
6.2 Exemplos de prismas complementares de grafos autoconexos satisfazendo $diam(G) = diam(\overline{G}) = 2$. 87
(a) $G$ não *split*. 87
(b) $G$ *split*. 87
6.3 Conjuntos $L(G_i)$ de $G'$ no grafo $G\overline{G}$, para $i \in [3]$. 89
6.4 Ilustração do Lema 6.14. 92
6.5 Exemplos de conjuntos envoltórios dos casos do Teorema 6.15. 93
(a) Caso 1 do Teorema 6.15. 93
(b) Caso 2 do Teorema 6.15. 93
6.6 Conjunto envoltório geodético do prisma complementar $K_4\overline{K}_4\overline{K_4\overline{K}_4}$. 94
6.7 Conjunto envoltório geodético que ilustra o Caso 1 do Teorema 6.18. 97
6.8 Conjunto envoltório geodético que ilustra o Caso 2 do Teorema 6.18. 98

7.1 Grafo $H\overline{H}$ construído para o Teorema 7.8. 105

8.1 Examplo de um conjunto convexo próprio de $G\overline{G}$. 111
8.2 Uma ilustração do grafo $H\overline{H}$ construído no Teorema 8.10. 115

# Lista de Tabelas


3.1 Casos considerados para a prova do Teorema 3.20. 51
3.2 Resumo dos resultados para COMP-SUB($\Pi$). 71
3.3 Resumo dos resultados para COMP-SUB($\Pi_{\emptyset}$). 71
3.4 Resumo dos resultados para COMP-SUB($\Pi_{K_{n,n}}$). 71
3.5 Resumo dos resultados para COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$). 72

6.1 Sumário dos resultados sobre o número envoltório para o prisma complementar $G\overline{G}$ de $G$ autoconexo. 100

7.1 Sumário dos resultados do número geodético para prismas complementares $G\overline{G}$. 106

8.1 Resultados obtidos sobre o número de Convexidade Geodética. 115

# Lista de Algoritmos

3.1 PARTICIONANDO-$H$-EM-COGRAFOS 66

CAPÍTULO 1

# Introdução

Um grafo é uma estrutura composta por dois conjuntos denominados vértices e arestas, onde as arestas modelam as relações existentes entre os vértices. Esta estrutura é bastante útil e vem sendo empregada em diversas áreas do conhecimento para a modelagem e solução de problemas combinatórios.

Um problema que têm sido alvo de interesse em virtude de suas diversas áreas de aplicação é o problema de particionamento de grafos. Por exemplo, considere um grafo $G$ em que seus vértices representam dados e suas arestas representam similaridades entre pares de dados. Existem algoritmos de detecção de agrupamentos que utilizam subrotinas de particionamento de grafos como uma forma de derivar padrões, correlações, tendências, grupos, trajetórias, anomalias, dentre outros aspectos que resumam os relacionamentos subjacentes nos dados [98].

Problemas de particionamento de grafos também possuem aplicações em redes sociais, computação paralela, processamento de imagens, circuitos digitais, sistemas de tráfego e bioinformática, e têm sido investigados sob uma ampla variedade de formulações, confira [13]. Um particionamento pode ser visto como uma forma de decomposição de uma estrutura "grande" em estruturas "pequenas". A importância do problema deriva de que a obtenção dessas estruturas "pequenas" e a descoberta de suas propriedades podem ser pontos chave no projeto de algoritmos eficientes, isto é, de complexidade polinomial de tempo no tamanho da entrada.

Esta tese aborda dois focos principais: particionamento e convexidade em grafos. Na primeira parte, motivados pelas diversas formulações de problemas de particionamento de grafos, introduzimos uma variante de problema de particionamento de grafos que generaliza o problema do reconhecimento dos grafos prismas complementares. Um *prisma complementar* $G\overline{G}$ é o grafo obtido pela união disjunta de um grafo $G$ e seu complemento $\overline{G}$ e a adição das arestas para obter um emparelhamento perfeito entre vértices de mesmo rótulo em $G$ e $\overline{G}$. Na variante proposta, denominada PARTIÇÃO EM SUBGRAFOS COMPLEMENTARES (COMP-SUB($\Pi$)), onde dado um grafo de entrada $H$ e uma propriedade de arestas $\Pi$, procuramos determinar se é possível decompor o grafo $G$ em dois subgrafos $G$ e $\overline{G}$ tais que $\overline{G}$ seja o grafo complementar de $G$ e o conjunto de arestas

$M$ entre $G$ e $\overline{G}$ satisfaça a propriedade $\Pi$.

Para COMP-SUB($\Pi$) quando $\Pi$ é uma propriedade qualquer, mostramos resultados para grafos livres de $k$-clique ou $k$-conjunto independente. Além dessa, estudamos as seguintes propriedades $\Pi$: quando $M$ é o conjunto vazio, quando $M$ possui todas as arestas possíveis entre $G$ e $\overline{G}$ e quando $M$ é um emparelhamento perfeito. Em particular, considerando $M$ vazio, denotado COMP-SUB($\Pi_\emptyset$), a decomposição também particiona o conjunto de arestas de $H$ em $E(G)$ e $E(\overline{G})$. Mostramos que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) é GI-completo, isto é, polinomialmente equivalente ao problema ISOMORFISMO EM GRAFOS. Além disso, provamos que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) ainda é GI-completo em grafos cordais, mas se torna mais tratável que o problema de ISOMORFISMO para várias subclasses de grafos cordais. Apresentamos caracterizações estruturais para grafos *split*, *starlike*, bloco e intervalo unitário. Também obtemos resultados de complexidade para grafos de permutação, cografos, grafos de comparabilidade, co-comparabilidade, co-intervalo e grafos fortemente cordais.

Considerando $\Pi_{K_{n,n}}$, o caso quando $M$ possui todas as arestas possíveis entre $G$ e $\overline{G}$, mostramos que muitos dos resultados obtidos para COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) se aplicam para COMP-SUB($\Pi_{K_{n,n}}$), através da prova de que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) em uma classe de grafos $\mathcal{C}$ é polinomialmente equivalente a COMP-SUB($\Pi_{K_{n,n}}$) na classe complementar de $\mathcal{C}$.

Sobre $\Pi_{\text{PERF}}$, o caso quando $M$ é um emparelhamento perfeito, mostramos resultados para quando o grafo $H$ de entrada é um cografo, grafo cordal, distância-hereditária e mostramos que o problema COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) é GI-difícil. Além disso, obtemos um algoritmo polinomial que determina se um grafo de entrada $H$ pode ser particionado em dois cografos complementares.

Na segunda parte desta tese, estudamos aspectos de convexidade em grafos prismas complementares. Antes disso, no Capítulo 5, estabelecemos algumas conexões entre a convexidade geodética e a classe de grafos composta por grafos particionáveis em dois subgrafos complementares, isto é, grafos $H$ instâncias-*sim* para o problema COMP-SUB($\Pi$). Ressaltamos que os prismas complementares fazem parte desta classe.

Para uma noção da aplicabilidade dos conceitos de convexidade, considere um grafo $G$ que represente uma rede de computadores. Suponha que caso ocorra uma determinada falha em dois computadores $a$ e $b$ da rede, esta falha se propaga para todos os outros computadores que estão situados nos caminhos mínimos entre $a$ e $b$. Qual é o número máximo de computadores da rede que podem falhar de forma que a rede toda não falhe?

Este e outros contextos de convexidade em grafos, exploram a ideia de disseminação de alguma informação entre entidades. Em especial, o contexto acima descrito tem relação direta com a determinação do parâmetro chamado número de convexidade do grafo $G$.

A motivação para a definição de convexidade em grafos partiu da noção de conjuntos convexos da geometria Euclidiana. Neste caso, um conjunto $S$ é convexo se todo segmento de reta entre dois pontos de $S$ permanece em $S$. Em um grafo $G$, dizemos que um conjunto de vértices $S$ de $G$ é *convexo* se todos os vértices de todo caminho mínimo entre dois vértices de $S$ pertencem a $S$.

Em especial, a definição de conjunto convexo em grafos acima descrita se refere à convexidade *geodética*, definida em termos dos caminhos mínimos em um grafo $G$. Outras convexidades bem conhecidas sobre um grafo $G$, são a convexidade *monofônica*, definida em termos dos caminhos induzidos em $G$ e a convexidade $P_3$, definida sobre os caminhos de tamanho dois entre dois vértices de $G$.

Os conceitos de convexidade encontram aplicações, em geral, permeando cenários de propagação de uma informação entre elementos. Podemos citar os contextos de contaminação [6, 8], estratégias de *marketing* [47, 83], divulgação de opinião [12, 59] e computação distribuída [70, 89, 94].

Neste trabalho, consideramos $\mathscr{C}$ a convexidade geodética. Chamamos os elementos de $\mathscr{C}$ de *conjuntos convexos*. O *fecho convexo* de um subconjunto de vértices $S$ de $G$ é o menor conjunto convexo contendo $S$. O *número envoltório* $h(G)$ é a cardinalidade do menor conjunto $S$ tal que o fecho convexo de $S$ seja o conjunto de vértices de $G$. O *número geodético* $g(G)$ é a cardinalidade do menor conjunto $S$ tal que todo vértice de $G$ está em um caminho mínimo entre dois vértices de $S$. O *número de convexidade* $con(G)$ é a cardinalidade do maior conjunto convexo próprio de $G$.

Trabalhamos com os três parâmetros definidos acima, com o foco em prismas complementares na convexidade geodética. Dando continuidade ao trabalho de Nascimento [90], que determinou o número envoltório geodético para prismas complementares $G\overline{G}$ quando $G$ é desconexo, nós obtemos resultados para prismas complementares $G\overline{G}$ quando ambos $G$ e $\overline{G}$ são conexos. Quando $G$ é um grafo *split*, caracterizamos conjuntos convexos geodéticos em $G\overline{G}$, o que permitiu mostrar que o número envoltório é ilimitado. Caso contrário, quando $G$ não é um grafo *split*, mostramos que o número envoltório de $G\overline{G}$ é limitado a 3. Também obtemos alguns limites e igualdades para o número envoltório de $G\overline{G}$ quando restringimos o diâmetro do grafo $G$.

Sobre o número geodético, mostramos que para um dado prisma complementar $G\overline{G}$ e um inteiro positivo $k$, é NP-completo decidir se $g(G\overline{G}) \leq k$. Estabelecemos limites inferiores do número geodético de $G\overline{G}$ quando $G$ ou $\overline{G}$ possuem vértices simpliciais, que culminou numa igualdade quando $G$ é um grafo *split*. Obtemos limites superiores do número geodético de $G\overline{G}$ quando $G$ é desconexo, e quando os diâmetros de $G$ e $\overline{G}$ são no máximo 3.

Considerando o número de convexidade para $G\overline{G}$, estabelecemos um limite inferior considerando grafos $G$ com diâmetro diferente de 3. Sobre este mesmo parâmetro,

obtivemos uma igualdade quando $G$ é desconexo, o que implicou imediatamente em um resultado para prismas complementares de cografos. Por fim, mostramos que para um dado prisma complementar $G\overline{G}$ e um inteiro positivo $k$, é NP-completo decidir se $con(G\overline{G}) \geq k$.

Mencionando algumas publicações em eventos e periódicos, nossos resultados sobre o número de convexidade foram apresentados no *VIII Latin American Workshop on Cliques in Graphs* (LAWCG 2018) [22] e os resultados sobre o número envoltório foram apresentados no L Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO 2018) [23]. Acerca do problema PARTIÇÃO EM SUBGRAFOS COMPLEMENTARES, nossos resultados foram aceitos no *14th International Conference and Workshop on Algorithms and Computation (WALCOM 2020)*. Além disso, os resultados do número geodético para prismas complementares foram publicados na revista *Information Processing Letters* [21] e os resultados sobre o número de convexidade geodética para prismas complementares foram publicados na revista *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* [20].

Esta tese está organizada em mais oito capítulos. O Capítulo 2 abrange os conceitos e as notações utilizados nesta tese. O Capítulo 3 explora o problema de particionamento de um grafo em dois subgrafos complementares. O Capítulo 4 contém as definições de convexidades abstratas e convexidade em grafos. O Capítulo 5 faz uma breve conexão entre a família de grafos que podem ser particionados em dois subgrafos complementares e os três parâmetros da convexidade geodética que entraram no escopo desta tese. Por fim, nos concentramos aos prismas complementares, para os quais mostramos nossos resultados sobre o número envoltório, o número geodético e o número de convexidade nos Capítulos 6, 7 e 8, respectivamente. Nossas conclusões e sugestões de trabalhos futuros seguem no Capítulo 9.

CAPÍTULO 2

# Conceitos Preliminares

Neste capítulo apresentamos uma fundamentação teórica necessária para o entendimento do restante do texto. As definições que apresentamos podem ser encontradas em Bondy e Murty [9], Diestel [46], Hammack et al. [76] e Haynes et al. [80], inclusive as sugerimos para o leitor que desejar aprofundar em algum assunto relacionado. Por outro lado, o leitor que estiver familiarizado com estes conceitos, pode sentir-se à vontade para pular este capítulo. No decorrer dos outros capítulos, podem ser apresentadas outras definições ou retomadas algumas terminologias daqui, se necessário.

## 2.1 Sobre Grafos

Um *grafo* $G$ é um par ordenado $(V(G), E(G))$ em que $V(G)$ é um conjunto de *vértices* e $E(G)$ é um conjunto de pares não ordenados de vértices de $V(G)$, não necessariamente distintos, chamados de *arestas*. Se não houver ambiguidade, denotaremos $V(G)$ por $V$ e $E(G)$ por $E$. Denotamos uma aresta que liga o vértice $u$ ao vértice $v$ por $uv$. Se $uv \in E(G)$, dizemos que o vértice $u$ é *adjacente* ao vértice $v$, ou que $u$ é *vizinho* de $v$. Também dizemos que a aresta $uv$ é *incidente* a $u$ e a $v$. Os pares de vértices que formam cada aresta são chamados *extremidades* ou *extremos* da aresta. O número de vértices de um grafo $G$ é dito ser a *ordem* de $G$. Um grafo de ordem igual a um é chamado de *grafo trivial*.

Um *laço* é uma aresta na qual seus extremos são iguais. Duas ou mais arestas com o mesmo par de extremidades são chamadas de *arestas paralelas*. Um grafo é *simples* se não possui laços nem arestas paralelas, *finito* se seus conjuntos de vértices e de arestas são ambos finitos e *não orientado* se suas arestas $uv$ e $vu$ representam a mesma aresta. Consideramos nesta tese grafos simples, finitos e não orientados. Denotamos o conjunto dos inteiros $\{1, \ldots, k\}$ por $[k]$.

O *complemento* de um grafo $G$, denotado por $\overline{G}$, possui o mesmo conjunto de vértices de $G$ e o conjunto de arestas complementares de $G$, ou seja, se a aresta $uv$ existir em $G$, os vértices $u$ e $v$ não são adjacentes em $\overline{G}$, porém se os vértices $u$ e $v$ não são adjacentes em $G$, a aresta $uv$ pertence ao complemento de $G$.

O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $deg_G(v)$, é o número de vértices que são adjacentes a $v$ em $G$. Se $deg_G(v) = 0$, dizemos que $v$ é um vértice *isolado*, e se $deg_G(v) = 1$, dizemos que $v$ é um vértice *pendente*. A *vizinhança aberta* de um vértice $v$, denotada por $N_G(v)$, ou simplesmente por $N(v)$ caso não haja ambiguidade, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a $v$ no grafo $G$. A *vizinhança fechada* de um vértice $v$ é denotada por $N[v]$ e corresponde ao conjunto $N(v) \cup \{v\}$. A *vizinhança aberta* de um conjunto $U$ de vértices no grafo $G$, denotada por $N_G(U)$, é o conjunto de vértices de $G$ adjacentes a algum vértice de $U$. A *vizinhança fechada* de um conjunto $U \subseteq V(G)$, denotada por $N_G[U]$, é o conjunto $N_G[U] = N_G(U) \cup U$.

Um *subgrafo* de um grafo $G = (V,E)$ é um grafo $G' = (V',E')$ tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se $G'$ contém todas as arestas $uv \in E$ com $u,v \in V'$, então $G'$ é um *subgrafo induzido* de $G$, denotado por $G[V']$. Dizemos que $V'$ *induz* ou *gera* $G'$ em $G$.

Se $U$ é qualquer conjunto de vértices, usualmente de $G$, denotamos $G \setminus U$ para $G[V(G) \setminus U]$. Em outras palavras, $G \setminus U$ é obtido de $G$ pela remoção de todos os vértices em $U \cap V(G)$ e suas arestas incidentes. Ao invés de $G \setminus V(G')$ nós simplesmente escrevemos $G \setminus G'$. Se $U = \{v\}$, isto é, unitário, escrevemos $G \setminus v$ ao invés de $G \setminus \{v\}$.

Um *grafo caminho* é um grafo não vazio $P$ no qual $V(P) = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ e $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{k-1}x_k\}$, em que $x_i$ são todos distintos. Um *caminho em um grafo* $G$ é um subgrafo $P$ de $G$ que é um caminho. O número de arestas de um caminho é seu *tamanho* ou *comprimento*, e o caminho com $n$ vértices é denotado por $P_n$. Frequentemente nos referimos a um caminho entre $x_0$ e $x_k$ pela sequência natural de seus vértices, escrevendo $P = x_0 \dots x_k$, ou simplesmente $(x_0, x_k)$-caminho. Um caminho de menor tamanho entre dois vértices é chamado de *geodésica* ou *caminho mínimo*. A Figura 2.1(a) apresenta um caminho $P_3$. Dados dois vértices $u,v \in V(G)$, dizemos que $v$ é *alcançável* a partir de $u$, se existe um caminho $P$ de $u$ a $v$ em $G$. Seja $P = u_0u_1 \dots u_k$ um caminho em um grafo $G$. Para cada vértice $u_i$, para $i \geq 1$, chamamos de *antecessor* de $u_i$ o vértice $u_{i-1}$ no caminho $P$.

A *distância* $d_G(u,v) = d(u,v)$ em $G$ de dois vértices $u$ e $v$ é o tamanho do menor caminho entre $u$ e $v$ em $G$. Se tal caminho não existe, fazemos $d(u,v) = \infty$. Considerando dois conjuntos de vértices $U, X \subseteq V(G)$, a distância $d_G(U,X)$ é o tamanho do menor caminho entre $U$ e $X$, ou seja $d_G(U,X) = min\{d(u,v) : u \in U, v \in X\}$. Denominamos *excentricidade*, $exc(v)$, de um vértice $v$ a maior distância de $v$ a qualquer outro vértice do grafo $G$. A maior dentre todas as excentricidades em um grafo $G$ é o seu *diâmetro*, denotado por $diam(G)$. Dizemos que $H$ é um subgrafo *isométrico* de $G$ se $H$ é um subgrafo de $G$ tal que $d_H(u,v) = d_G(u,v)$ para todo par $u,v \in V(H)$.

Considere uma propriedade $\mathscr{P}$ e seja $S$ um conjunto de vértices de um grafo $G$ que tenha a propriedade $\mathscr{P}$. O conjunto $S$ é *maximal* com relação à propriedade $\mathscr{P}$ se não existir um outro subconjunto de vértices $S'$ de $G$ com a propriedade $\mathscr{P}$, tal que

$S \subset S'$. Dado um grafo $G$ e uma propriedade $\mathscr{P}$ de $G$, dizemos que $\mathscr{P}$ é *hereditária* se todo subgrafo induzido de $G$ possui a propriedade $\mathscr{P}$.

Um grafo $G$ é *conexo* se para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existir um caminho de $u$ a $v$ em $G$ e *desconexo* caso contrário. As *componentes*, ou *componentes conexas*, de um grafo $G$ desconexo são seus subgrafos conexos maximais. Denotamos o número de componentes conexas de um grafo $G$ por $c(G)$. Se $G$ é um grafo desconexo, então $diam(G) = \infty$. Dizemos que $G$ é *autoconexo*, se $G$ e seu complemento $\overline{G}$ são ambos conexos.

Seja $G$ um grafo desconexo e $G_i$ uma componente conexa de $G$. Dizemos que $G_i$ é uma *componente trivial*, se $G_i$ possui apenas um vértice. A componente $G_i$ é dita *não trivial* em caso contrário.

Um *grafo ciclo* é um grafo $C$ com conjunto de vértices $V(C) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, com $k \geq 3$, e arestas $E(C) = \{x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k, x_kx_1\}$ em que $x_1, \ldots, x_k$ são vértices distintos. Um *ciclo em um grafo* $G$ é um subgrafo $C$ de $G$ que é um ciclo. Um ciclo de $n$ vértices é denotado por $C_n$. Veja um ciclo $C_4$ na Figura 2.1(b).

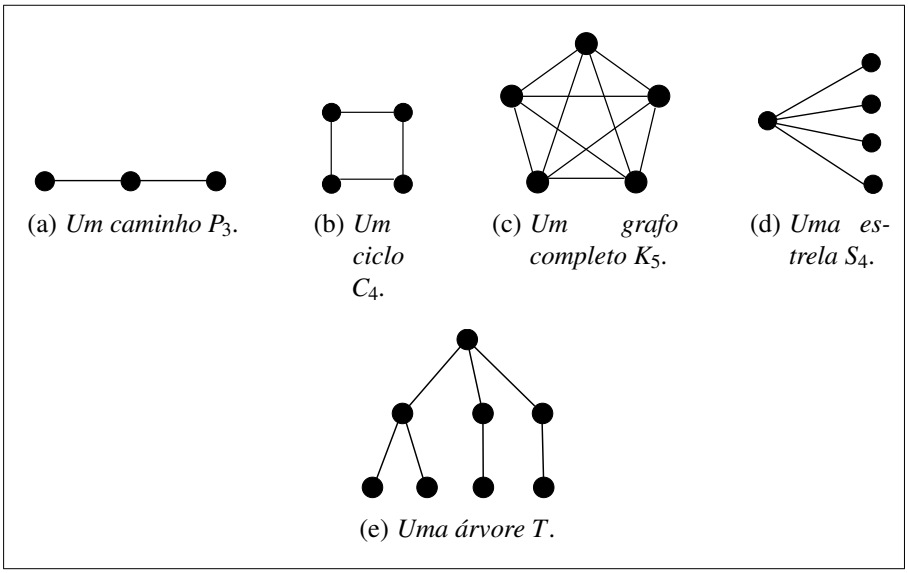
Um *grafo completo* $K_n$ é um grafo com $n$ vértices no qual há uma aresta entre cada par de vértices distintos. Um grafo completo $K_5$ pode ser encontrado na Figura 2.1(c). Uma *clique* é um subconjunto de vértices de um grafo $G$, tal que cada dois vértices do subconjunto são adjacentes. Um conjunto *independente* de um grafo $G$ é um subconjunto de vértices que tomados dois a dois são não adjacentes. Um vértice $v$ de um grafo $G$ é *simplicial* se o grafo induzido por $N[v]$ for uma clique. Uma clique $C$ é *máxima* se $|C|$ é o maior tamanho possível de uma clique em $G$. Similarmente, um conjunto independente $I$ é *máximo* se $|I|$ é o maior tamanho possível de um conjunto independente em $G$.

Seja $r$ um inteiro e $r \geq 2$. Um grafo $G$ é chamado de *r-partido* se $V(G)$ admite uma partição em $r$ conjuntos independentes tal que cada aresta tem seus extremos em partições diferentes. Chamamos o grafo 2-partido de *bipartido*. Um grafo $r$-partido no qual cada dois vértices de diferentes partições são adjacentes é chamado de *r-partido completo*. Um grafo bipartido completo com partições de tamanho $m$ e $n$ será denotado por $K_{m,n}$. Definimos o *grafo estrela* $S_n$ como o grafo bipartido completo $K_{1,n}$, para $n \geq 2$. Uma estrela $S_4$ pode ser observada na Figura 2.1(d).

Um grafo sem ciclos é chamado de *floresta*. Uma floresta conexa é chamada de *árvore*. Os vértices de grau um de uma árvore são denominados *folhas*. Um exemplo de árvore $T$ pode ser visto na Figura 2.1(e).

Um *emparelhamento* em um grafo conexo $G$ é um conjunto de arestas $M \subseteq E(G)$ tal que quaisquer duas arestas não compartilham um vértice. Um emparelhamento $M$ é dito *perfeito* se todo vértice de $G$ é extremo de alguma aresta de $M$.

Sejam $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ dois grafos. Dizemos que o grafo $G$ é *isomorfo*



(a) *Um caminho* $P_3$. (b) *Um ciclo* $C_4$. (c) *Um grafo completo* $K_5$. (d) *Uma estrela* $S_4$.

(e) *Uma árvore* $T$.

**Figura 2.1:** *Alguns exemplos de classes de grafos. Fonte: [90].*

ao grafo $G'$ e escrevemos $G \simeq G'$, se há uma bijeção $\varphi : V \to V'$ com $xy \in E \longleftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ para todo $x, y \in V$. Este mapeamento é chamado *isomorfismo*. O problema de decisão relacionado ao isomorfismo é definido formalmente como segue.

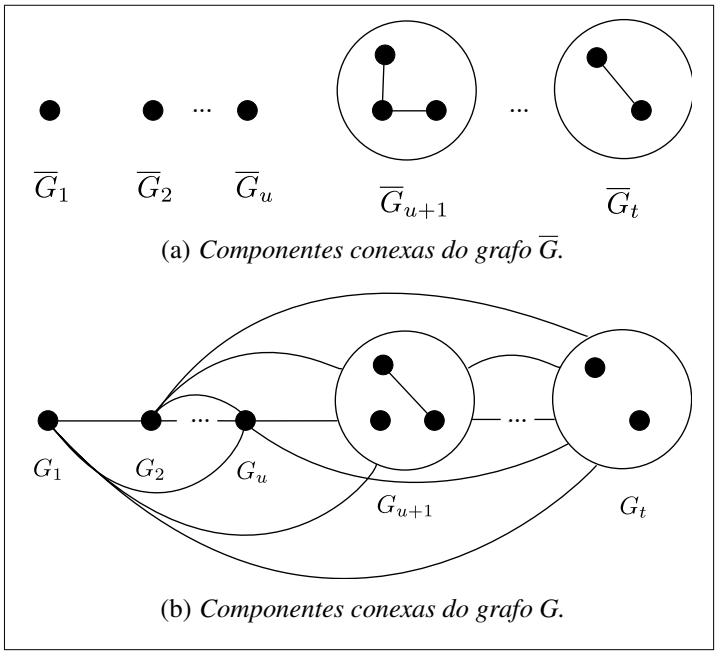
**Problema 2.1** ISOMORFISMO DE GRAFOS (ISOMORFISMO)
***Instância:*** *Grafos* $G_1$ *e* $G_2$.
***Pergunta:*** *O grafo* $G_1$ *é isomorfo ao grafo* $G_2$*?*

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de grafos. Um grafo $G$ é dito *co-*$\mathcal{C}$ se o seu complemento $\overline{G} \in \mathcal{C}$. Um grafo $G$ é *autocomplementar* se $G \simeq \overline{G}$.

Sejam $H_1, \ldots, H_\ell$ grafos. Dizemos que um grafo $G$ é *livre de* $\{H_1, \ldots, H_\ell\}$ se, para todo $i \in [\ell]$, o grafo $G$ não contém um subgrafo induzido isomorfo a $H_i$. Para a classe de grafos definida por $\mathcal{C} = \{G : G \text{ é livre de } \{H_1, \ldots, H_\ell\}\}$, dizemos cada $H_i$ é um *subgrafo proibido* de $\mathcal{C}$. Note que a propriedade "livre de" é uma propriedade hereditária.

Um *grafo cluster* $G$ é um grafo livre de $P_3$. Equivalentemente $G$ é a união disjunta de cliques. Um *cografo* $G$ é um grafo livre de $P_4$. Seja $G$ um cografo conexo. Denote por $u$ o número de *vértices universais* em $G$, ou seja, vértices adjacentes a todos os vértices de $G$ exceto a ele próprio. Considere agora $\overline{G}$, denote por $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_u, \ldots, \overline{G}_t$ as componentes conexas de $\overline{G}$, e por $G_1, \ldots, G_u, \ldots, G_t$ os subgrafos de $G$ induzidos pelos conjuntos de vértices das respectivas componentes conexas de $\overline{G}$, em que $|V(G_i)| \geq 2$ quando $i > u$. As seguintes considerações podem ser feitas: as componentes $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_u$ são vértices isolados em $\overline{G}$; e as componentes $G_1, \ldots, G_u$ são vértices universais em $G$; e em $G$ os vértices de uma componente $G_{u+i}, i > 0$ são adjacentes a todos os demais vértices de $G \setminus G_{u+i}$ (Figura 2.2).

Uma aresta $e$ é uma *corda* de um ciclo $C$ se $e$ liga dois vértices de $C$ mas $e \notin E(C)$. Um grafo é *cordal* se todo ciclo de tamanho pelo menos 4 tem uma corda. Assim, $G$ é




(a) *Componentes conexas do grafo* $\overline{G}$.

(b) *Componentes conexas do grafo G.*

**Figura 2.2:** *Cografo G e* $\overline{G}$. *Fonte: [29].*

cordal se $G$ é livre de $C_k$, para todo $k \geq 4$. Um *diamond* é um grafo $K_4$ menos uma aresta, observe na Figura 2.3(a). Um grafo $G$ é um grafo *bloco* se $G$ é cordal e livre de *diamond*.

Um $sun_n$ é um grafo com $2n$ vértices, $n \geq 3$, do qual seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto independente $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ e uma clique $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ tal que $u_i$ é adjacente a $w_j$ se e somente se $i = j$ ou $i = (j+1) \mod n$. Veja um $sun_3$ na Figura 2.3(b). Um grafo $G$ é *fortemente cordal* se $G$ é cordal e além disso, livre de $sun_k$, para todo $k \geq 3$. Um grafo bipartido é *bipartido cordal* se ele não contém um ciclo induzido de tamanho pelo menos 6.

Uma *net* é um grafo $K_3$ com três arestas pendentes não incidentes entre si. Um *bull* é um grafo $K_3$ com duas arestas pendentes não incidentes entre si. Veja uma *net* e um *bull* nas Figuras 2.3(c) e (d), respectivamente.

Um grafo $G$ é um *grafo de comparabilidade* se $G$ é *transitivamente orientável*, isto é, todas as arestas em $E(G)$ podem ser orientadas de tal forma que se $ab$ e $bc$ são arestas direcionadas, então $ac$ é uma aresta orientada. O *bull* é um exemplo de grafo de comparabilidade. Uma de suas orientações transitivas pode ser vista na Figura 2.4.

Um grafo $G = (V, E)$ com $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ é um *grafo de permutação* se existe uma permutação $\pi$ sobre $V$ tal que $ij \in E$ se e somente se $(i - j)(\pi(i) - \pi(j)) < 0$. A classe dos grafos de permutação equivale à classe COMPARABILIDADE $\cap$ *co*-COMPARABILIDADE. O *bull* é um exemplo de grafo de permutação.

Um grafo $G$ é um *grafo de intervalo* se $V(G)$ pode ser representado através de um modelo de interseção de intervalos na reta real. Em outras palavras, para todo $v \in V(G)$ existe um intervalo $I_v \subseteq \mathbb{R}$ tal que $uv \in E(G)$ se e somente se $I_u \cap I_v \neq \emptyset$. Na

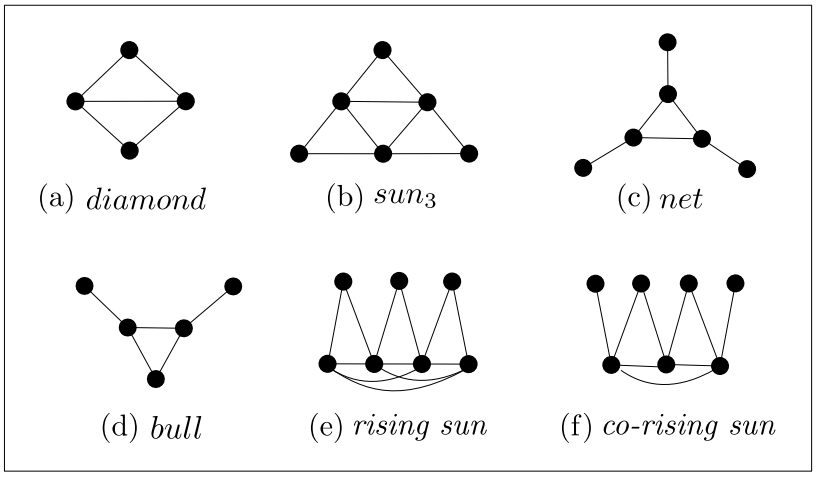



**Figura 2.3:** *Mais exemplos de grafos.*

Figura 2.4 há um exemplo de grafo de intervalo e um de seus modelos de intervalo. Um *grafo de intervalo unitário* é um grafo de intervalo em que cada intervalo do seu modelo de interseção na reta real tem tamanho unitário. Equivalentemente, um grafo de intervalo unitário é um grafo cordal livre de $\{sun_3, net, K_{1,3}\}$.

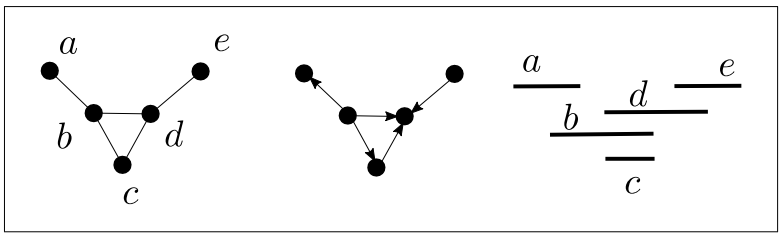



**Figura 2.4:** *Um grafo de comparabilidade e de intervalo, uma de suas orientações transitivas e um de seus modelos de intervalo.*

Um grafo *distância-hereditária* é um grafo livre de $\{domino, house, gem, C_{k+5}\}$, para todo $k \geq 0$. Os grafos *domino*, *house* e *gem* podem ser vistos na Figura 2.5.

Um *grafo split* é um grafo $G$ no qual seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique $C$ e um conjunto independente $I$, ou equivalentemente um grafo livre de $\{2K_2, C_4, C_5\}$. Definimos algumas propriedades relevantes de grafos *split* mais adiante, na Seção 2.2. Um grafo *split completo* é um grafo *split* $G = (C \cup I, E)$ no qual todo vértice em $I$ é adjacente a todo vértice de $C$. Equivalentemente, um grafo *split* completo é um grafo *split* livre de $\overline{P}_3$. Um grafo *permutação split* é um grafo livre de $\{2K_2, C_4, C_5, sun_3, net, rising\ sun, co\text{-}rising\ sun\}$. Veja um *rising sun* e um *co-rising sun* nas Figuras 2.3(e) e (f), respectivamente.

Um grafo $G$ é um grafo *threshold* se $G$ é livre de $\{2K_2, C_4, P_4\}$. Destacamos que a classe dos grafos *threshold* equivale a classe COGRAFO $\cap$ SPLIT. Um grafo $G$ é 2-*threshold* se $G$ pode ser obtido pela união de arestas de dois grafos *threshold*.

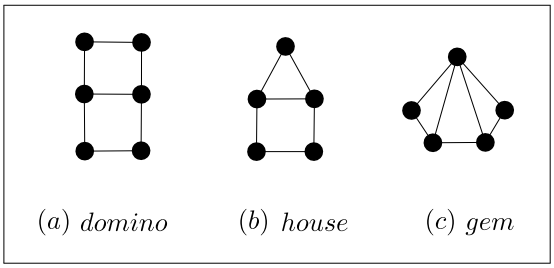



**Figura 2.5:** *Subgrafos proibidos em um grafo distância-hereditária.*

Seja $\mathcal{A}$ uma família de conjuntos $A_1,\ldots,A_n$. O *grafo de intersecção* $G$ de $\mathcal{A}$ é o grafo com $V(G) = \{A_1,\ldots,A_n\}$, em que $A_iA_j \in E(G)$ se e somente se $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Um grafo *starlike* é um grafo de intersecção de substrelas de uma estrela [30]. Equivalentemente, um grafo *starlike* é um grafo livre de $\{P_5, C_4, C_5, H_1, H_2, 2P_3\}$. Os grafos $H_1$ e $H_2$ seguem na Figura 2.6.

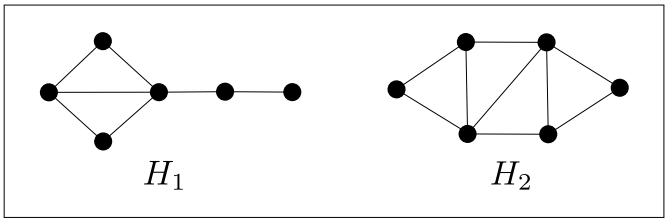



**Figura 2.6:** *Dois subgrafos proibidos de um grafo starlike.*

Seja $G = (V,E)$ um grafo. Um *corte* $(A,B)$ é uma partição de $V$ em $A \cup B$ onde $A$ e $B$ são disjuntos e não vazios. O conjunto de todas as arestas de $G$ que possuem um extremo em $A$ e outro extremo em $B$, denotado por $[A,B]$, é chamado *conjunto de corte (de arestas)* do corte $(A,B)$. Um *emparelhamento perfeito de corte* $M$ em um grafo $G$ é um emparelhamento $M$ tal que $M$ é perfeito e $M$ também é um conjunto de corte.

Uma *k-coloração de vértices própria* é uma atribuição de no máximo $k$ cores aos vértices de um grafo tal que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Definimos seu respectivo problema de decisão formalmente como a seguir.

**Problema 2.2** $k$-COLORAÇÃO DE VÉRTICES
***Instância:*** *Um grafo $G = (V,E)$ e um inteiro positivo $k$.*
***Pergunta:*** *O grafo $G$ admite um mapeamento $c\colon V \to \{1,\ldots,k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$, para toda aresta $uv \in E$?*

Lembramos que um problema de decisão $P$ é composto por uma instância e por uma pergunta que admite somente duas respostas possíveis, *sim* ou *não*. Se uma determinada instância $I$ é uma resposta correta para $P$, dizemos que $I$ é uma *instância*-sim para $P$. Caso contrário, $I$ é uma *instância*-não para $P$.

Sejam $P$ e $P'$ dois problemas de decisão. O problema $P$ é *polinomialmente redutível* a $P'$, denotado por $P \propto P'$, se existe um algoritmo $R$ que mapeia qualquer instância $I$ de $P$ em uma instância equivalente $I'$ de $P'$, no qual $R$ executa em tempo polinomial sobre $|I|$. Os problemas $P$ e $P'$são *polinomialmente equivalentes* se $P \propto P'$ e $P' \propto P$. Dizemos que $P$ é *trivial* se toda instância-*sim* de $P$ tem tamanho limitado por uma constante.

Denotamos por GI a classe de problemas polinomialmente redutíveis a ISOMORFISMO DE GRAFOS. A introdução desta classe foi motivada pelo desconhecimento de sua complexidade: não se conhece algoritmos polinomiais que resolvam ISOMORFISMO DE GRAFOS nem se sabe se o mesmo é um problema NP-completo [85]. Vários problemas nesta classe são descritos por Booth e Colbourn [10], Köbler [85] e Mathon [87]. Este último autor ainda menciona que, como nenhum problema NP-completo é conhecido para o qual as suas versões de decisão e contagem sejam polinomialmente redutíveis entre si, este resultado contribui como uma evidência para a conjectura de que ISOMORFISMO DE GRAFOS não seja NP-completo.

Dizemos que um problema $P$ é GI-*completo* se as duas condições são satisfeitas:

1. $P \in$ GI;
2. $P$ é GI-difícil, ou seja, para todo problema $P' \in$ GI, $P' \propto P$;

Para a prova da pertinência, isto é $P \in$ GI, escolhemos um membro da classe GI, digamos ISOMORFISMO DE GRAFOS e mostramos que $P \propto$ ISOMORFISMO DE GRAFOS. Enquanto que, para a prova da dificuldade, também podemos escolher um membro de GI (já que a relação de redutibilidade polinomial é transitiva), por exemplo ISOMORFISMO DE GRAFOS, e mostramos que ISOMORFISMO DE GRAFOS $\propto P$. Em outras palavras, um problema $P$ é GI-*completo* se $P$ é polinomialmente equivalente a ISOMORFISMO DE GRAFOS.

A teoria de Complexidade Parametrizada [45] lida com problemas NP-difíceis cujas instâncias vêm adicionalmente equipadas com um inteiro $k$, chamado *parâmetro*. Um problema $P$ parametrizado por $k$ pertence à classe FPT, ou é *tratável por parâmetro fixo*, se existe um algoritmo para solucionar $P$ em tempo $f(k) \cdot n^c$, onde $n$ denota o tamanho da entrada, $c$ é uma constante arbitrária e $f$ é uma função qualquer.

No decorrer do texto, utilizamos a terminologia *algoritmo eficiente* para designar um algoritmo que pode ser resolvido em complexidade polinomial de tempo no tamanho do parâmetro de entrada.

Antes de terminar esta seção, veja na Tabela 2.1 um resumo das definições das classes de grafos mais utilizadas nesta tese.

| **Classe de Grafos** | **Definição** ($k \geq 0$) |
|---|---|
| bloco | cordal livre de *diamond* |
| cluster | livre de $P_3$ |
| cografo | livre de $P_4$ |
| cordal | livre de $C_{k+4}$ |
| fortemente cordal | cordal livre de $sun_{k+3}$ |
| intervalo unitário | livre de $\{sun_3, net, K_{1,3}\}$ |
| *split* | livre de $\{2K_2, C_4, C_5\}$ |
| *split* completo | *split* livre de $\overline{P}_3$ |
| *starlike* | livre de livre de $\{P_5, C_4, C_5, H_1, H_2, 2P_3\}$ |
| *threshold* | livre de $\{2K_2, C_4, P_4\}$, equivalente a COGRAFO $\cap$ SPLIT |
| permutação | COMPARABILIDADE $\cap$ co-COMPARABILIDADE |
| permutação *split* | *split* livre de $\{sun_3, net$, *rising sun*, *co-rising sun*$\}$ |

## 2.2 Sobre Grafos *Split*

Esta seção é dedicada à exposição dos conceitos e proposições especificamente aplicados a grafos *split*. Nossos fundamentos são baseados em Foldes e Hammer [71], Golumbic [75] e Ramos [96].

Seja $G$ um grafo *split*. Chamamos a partição $V(G) = C \cup I$ em que $C$ é uma clique e $I$ é um conjunto independente, ambos com ao menos um elemento, de uma *partição split*. Uma partição *split* não é necessariamente única. Veja um exemplo na Figura 2.7, onde os vértices em preto pertencem a $C$ e os demais pertencem a $I$.

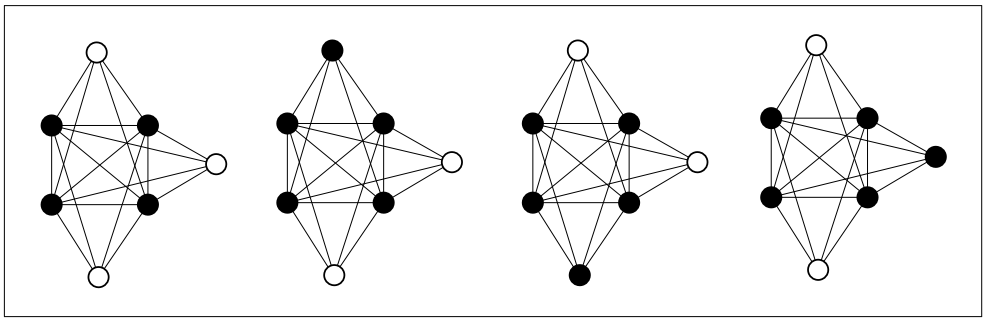


**Figura 2.7:** *Exemplo de partições split.*

Dado um grafo *split* $G$, qualquer partição *split* $V(G) = C \cup I$ tem que satisfazer ao menos uma das três possibilidades a seguir.

- $C$ é uma clique máxima e $I$ é um conjunto independente máximo e a partição *split* é única;
- $C$ é uma clique máxima e existe um vértice $v \in C$ tal que $I \cup \{v\}$ é um conjunto independente máximo;

- $I$ é um conjunto independente máximo e existe um vértice $y \in I$ tal que $C \cup \{y\}$ é uma clique máxima.

A partir disso, podemos concluir que um grafo *split* qualquer tem exatamente uma ou duas partições *split* não isomorfas. Se a partição *split* é única, é evidente que $C$ é uma clique máxima e $I$ é um conjunto independente máximo. Caso contrário, consideramos a partição *split* de $V(G)$ de acordo com a Observação 2.3.

**Observação 2.3** *Seja $G$ um grafo split. Se $V(G)$ admite uma partição não única em uma clique $C$ e um conjunto independente $I$, consideramos a partição split $V(G) = C \cup I$ em que*

*(a) $C$ é uma clique máxima, se $C$ é a única clique máxima em $G$.*
*(b) $I$ é um conjunto independente máximo, caso contrário.*

Quando necessário, denotaremos por $C(G)$ a clique de $G$ e por $I(G)$ o conjunto independente de $G$ para evitar ambiguidade. Os grafos $G_1$, $G_2$ e $G_3$, da Figura 2.8, ilustram cada uma das três possíveis partições consideradas, respectivamente. Em cada grafo $G_i$, para todo $1 \leq i \leq 3$, os vértices pretos representam a clique $C(G_i)$ e os vértices brancos representam o conjunto independente $I(G_i)$.

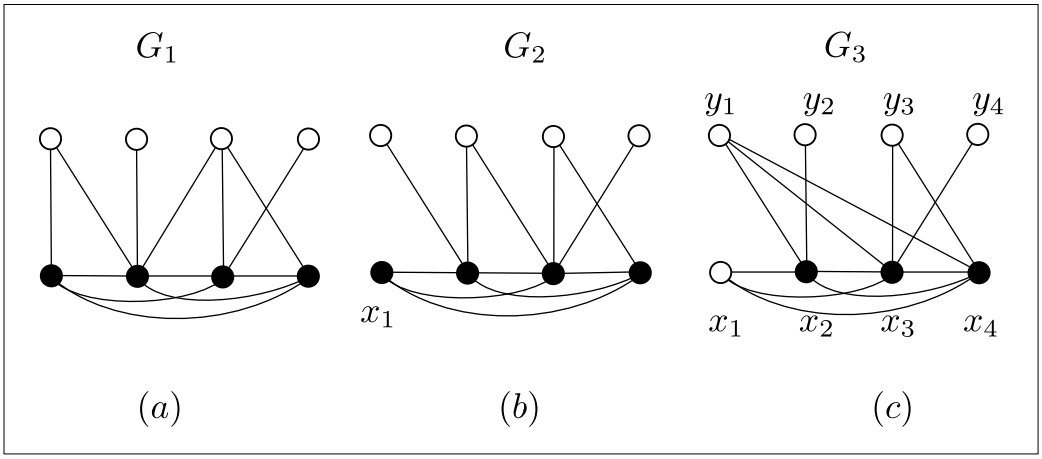



**Figura 2.8:** *Grafos que exemplificam os três tipos de partições split consideradas.*

Note que a partição *split* de $V(G_1)$ é única. Porém, as partições *split* de $V(G_2)$ e $V(G_3)$ não são, já que o vértice $x_1$ pode pertencer a $C(G_2)$ e $I(G_2)$ (resp. $C(G_3)$ e $I(G_3)$). Além disso, a clique máxima de $G_2$ é única, ao passo que $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ e $\{y_1, x_2, x_3, x_4\}$ são duas cliques máximas possíveis em $G_3$. No caso deste último grafo, definimos a partição *split* de $V(G_3)$ de acordo com o item (b) da Observação 2.3, assim $C(G_3) = \{x_2, x_3, x_4\}$ e $I(G_3) = \{x_1, y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Em 1977, Foldes e Hammer [71] caracterizaram grafos *split* quanto aos seus subgrafos proibidos. Veja a seguir.

**Teorema 2.4 (Foldes e Hammer [71])** *Um grafo $G$ é split se e somente se $G$ não tem um subgrafo isomorfo a um dos três grafos proibidos: $C_4$, $C_5$, ou $2K_2$.*

A partir desta caracterização dos subgrafos proibidos segue-se que o complemento e todo subgrafo induzido de um grafo *split* também é *split*.

Um grafo *split completo* é um grafo *split* $G = (C \cup I, E)$ no qual todo vértice em $I$ é adjacente a todo vértice de $C$. Equivalentemente, um grafo *split* completo é um grafo livre de $\{C_4, \overline{P}_3\}$. Um grafo *permutação split* é um grafo livre de $\{2K_2, C_4, C_5, sun_3, net, rising\ sun, co\text{-}rising\ sun\}$. Veja um *rising sun* e um *co-rising sun* nas Figuras 2.3(e) e (f), respectivamente.

Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo *split*. Construa o grafo $G'$ a partir de $G$ através da remoção das arestas do grafo induzido por $C$. Chamamos o grafo $G'$ de *grafo de componentes* de $G$. Denotamos por $c(G')$ o número de componentes conexas de $G'$. Além disso, nos referimos a $nt(G')$ e $t(G')$ como o número de componentes não triviais e triviais de $G'$, respectivamente. A Definição 2.5 expressa formalmente a ideia de um grafo de componentes.

**Definição 2.5** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split. Definimos o grafo de componentes $G'$ de $G$ como*

$$G' = G \setminus E(G[C]) = \bigcup_{i=1}^{c(G')} G_i.$$

## 2.3 Sobre Operações entre Grafos

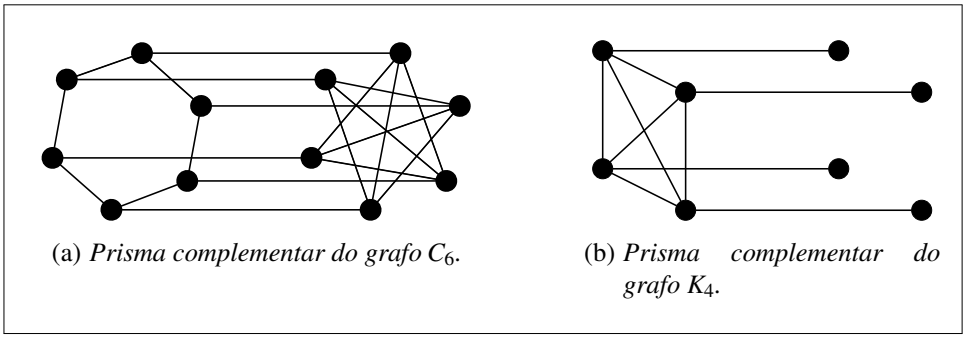
A *união disjunta* de dois grafos $G$ e $H$, denotada por $G \cup H$, é o grafo com $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. O *join* dos grafos $G$ e $H$, denotado $G + H$, é o grafo formado por $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ e } v \in V(H)\}$.

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de grafos. Dizemos que $\mathcal{C}$ é *fechada* sob uma operação $\bullet$, se para todo par de grafos $G, H \in \mathcal{C}$, vale que $G \bullet H \in \mathcal{C}$. Similarmente, $\mathcal{C}$ é *fechada sob complemento*, se para qualquer $G \in \mathcal{C}$, $\overline{G} \in \mathcal{C}$.

Seja $G$ um grafo e $\overline{G}$ o seu complemento. Para cada vértice $v \in V(G)$ denotamos o vértice $\overline{v} \in V(\overline{G})$ como o seu vértice *correspondente*. Para um grafo $G$ com conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E(G)$, o *prisma complementar* $G\overline{G}$ de $G$ é o grafo com conjunto de vértices $V(G\overline{G}) = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ e conjunto de arestas $E(G\overline{G}) = E(G) \cup E(\overline{G}) \cup \{v_1\overline{v}_1, \ldots, v_n\overline{v}_n\}$, em que $V(\overline{G}) = \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$.

Em outras palavras, o prisma complementar $G\overline{G}$ de $G$ é o grafo formado a partir da união disjunta de $G$ e seu complemento $\overline{G}$, adicionando as arestas para um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes de $G$ e $\overline{G}$. Dois exemplos

de prismas complementares podem ser vistos na Figura 2.9, que mostra o grafo $C_6\overline{C}_6$, em 2.9(a), e o grafo $K_4\overline{K}_4$, em 2.9(b). Para um conjunto $X \subseteq V(G)$, denotamos por $\overline{X}$ o *conjunto de vértices correspondentes* de $X$ em $V(\overline{G})$.



(a) *Prisma complementar do grafo* $C_6$. (b) *Prisma complementar do grafo* $K_4$.

**Figura 2.9:** *Exemplos de prismas complementares. Fonte: [90].*

Os prismas complementares foram introduzidos por Haynes et al. [80], como um caso especial do *produto complementar*, também definido por eles. Sejam $G$ e $H$ dois grafos com $V(G) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Seja $R \subseteq V(G)$ e $S \subseteq V(H)$. O *produto complementar*, $G(R)\Box H(S)$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G(R)\Box H(S)) = \{(u_i, v_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$ e uma aresta $(u_i, v_j)(u_h, v_k)$ está em $E(G(R)\Box H(S))$:

- se $i = h$, $u_i \in R$, e $v_j v_k \in E(H)$, ou se $i = h$, $u_i \notin R$, e $v_j v_k \notin E(H)$, ou
- se $j = k$, $v_j \in S$, e $u_i u_h \in E(G)$, ou se $j = k$, $v_j \notin S$, e $u_i u_h \notin E(G)$.

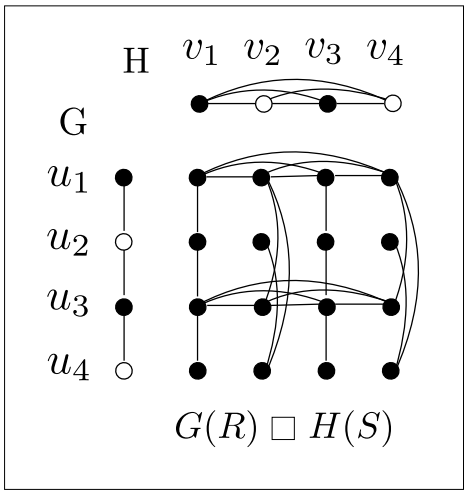



**Figura 2.10:** *Produto complementar* $G(R)\Box H(S)$, *com* $R = \{u_1, u_3\}$ *e* $S = \{v_1, v_3\}$. *Fonte: [90].*

Em outros termos, o produto complementar $G(R)\Box H(S)$ é formado, para todo $u_i \in V(G)$, pela substituição de $u_i$ por uma cópia de $H$, se $u_i$ está em $R$ e por uma cópia de $\overline{H}$, se $u_i$ não está em $R$, e para todo $v_j \in V(H)$, pela substituição de $v_j$ por uma cópia de $G$ se $v_j$ está em $S$ e uma cópia de $\overline{G}$, se $v_j$ não está em $S$. O produto complementar

generaliza o produto Cartesiano, que é simplesmente $G(V(G))\square H(V(H)) = G\square H$, e o prisma complementar $G\overline{G}$ é definido a partir de $G(V(G))\square K_2(S)$, com $|S| = 1$.

CAPÍTULO 3

# Partição em Subgrafos Complementares

Neste capítulo apresentamos nossos resultados estruturais e de complexidade sobre a família de grafos que podem ser particionados em dois subgrafos complementares.

Conforme destacado na Introdução, problemas de particionamento têm sido investigados sob uma ampla variedade de formulações. Um exemplo clássico e bem conhecido de problema de particionamento é $k$-COLORAÇÃO DE VÉRTICES. Determinar se um grafo $G$ possui uma *$k$-coloração de vértices própria* nada mais é do que determinar se $V(G)$ pode ser particionado em $k$ conjuntos independentes. Outro exemplo de problema de partição relacionado é COBERTURA POR CLIQUES, no qual sua entrada é um grafo $G = (V,E)$ juntamente com um inteiro $k$, e a questão é determinar se existe um conjunto de $k$ cliques em $G$ tais que cada vértice de $G$ está contido em exatamente uma destas cliques.

Feder et al. [68] consideram um problema de particionamento do conjunto de vértices $V$ de um grafo $G$ em $k$ partes $V_1, V_2, \ldots, V_k$ com um padrão de restrições internas, como $V_i$ é um conjunto independente ou uma clique, e restrições externas, como pares $V_i, V_j$ são completamente adjacentes ou não adjacentes. Eles codificam de maneira sofisticada tais restrições através de uma matriz simétrica $M_{k\times k}$ o que chamaram de $M$-partição. A definição de $M$-partição pode ser vista como uma generalização do problema COLORAÇÃO DE VÉRTICES e estes estudos culminaram, dentre outros resultados, para o reconhecimento de grafos *split* generalizados em tempo polinomial.

Um outro contexto, relacionado também a conjuntos independentes e cliques, foi apresentado por Churchley e Huang [39]. Eles estudam polaridade e monopolaridade de grafos. Um grafo $G$ é *polar* se $V(G)$ pode ser particionado em $A$ e $B$ de tal forma que $G[A]$ e $G[B]$ sejam respectivamente um grafo multipartido completo e uma união disjunta de cliques, isto é, o complemento de um grafo multipartido. Quando $A$ é um conjunto independente, $G$ é dito *monopolar*.

Na célebre obra de Garey e Johnson [72], vários problemas relacionados a partição também são encontrados. Alguns exemplos são PARTIÇÃO EM TRIÂNGULOS, EM SUBGRAFOS ISOMORFOS, EM SUBGRAFOS HAMILTONIANOS, EM FLORESTAS, EM CLIQUES, EM EMPARELHAMENTOS PERFEITOS [GT11–GT16]. Vale mencionar que

todos esses são problemas NP-completos.

Como observado acima, problemas de cunho teórico formam certamente um ponto de partida para o estudo de particionamento de grafos. Por outro lado, com um enfoque mais prático, em um survey por Buluç et al. [13] são discutidas formulações avançadas de problemas de particionamento, bem como aplicações em detecção de agrupamentos em redes sociais, processamento paralelo, processamento de imagens, sistemas de tráfego e bioinformática.

A noção de partição também está presente na definição de algumas classes de grafos, como os grafos bipartidos e os grafos *split*. Lembramos que um grafo $G$ é *bipartido* se seu conjunto de vértices admite uma partição $A \cup B$ tal que $A$ e $B$ são conjuntos independentes. Um grafo *split* $G$ é um grafo cujo conjunto de vértices admite uma partição $C \cup I$, onde $C$ é uma clique e $I$ um conjunto independente. Os prismas complementares $G\overline{G}$ também possuem o conceito subjacente de partição, e, além disso, partições complementares. Isto se deve ao fato de que são obtidos pela união disjunta de um grafo $G$ e seu complemento $\overline{G}$ e a adição das arestas para obter um emparelhamento perfeito entre vértices de mesmo rótulo em $G$ e $\overline{G}$.

Diante do exposto acima, motivados pela existência de diversas formulações de problemas de partição e pela definição de algumas classes de grafos, em especial a de prismas complementares, introduzimos o problema que diz respeito ao nosso estudo.

**Definição 3.1** *Um grafo $H = (V,E)$ é decomposto em dois grafos $G_1$ e $G_2$ se $V(H)$ pode ser particionado em $V_1 \cup V_2$, em que $H[V_1] = G_1$ e $H[V_2] = G_2$. O conjunto de corte $[V_1,V_2]$ é o conjunto de corte da decomposição. Além disso, a decomposição $(G_1,G_2)$ de $H$ é chamada decomposição complementar se $G_1 = \overline{G}_2$.*

| PARTIÇÃO EM SUBGRAFOS COMPLEMENTARES (COMP-SUB($\Pi$)) |
|---|
| **Instância:** Um grafo $H = (V,E)$ e uma propriedade de arestas $\Pi$. |
| **Pergunta:** O grafo $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, de tal forma que o conjunto de corte $M$ desta decomposição satisfaz a propriedade $\Pi$? |

Escrevemos COMP-SUB($\Pi$) como uma abreviação para o problema PARTIÇÃO EM SUBGRAFOS COMPLEMENTARES com a propriedade de arestas $\Pi$ para o conjunto de corte $M$. Por conveniência, muitas vezes utilizamos COMP-SUB($\Pi$) como uma família de grafos e usamos $H \in$ COMP-SUB($\Pi$) para denotar que $H$ é uma instância *sim* do problema COMP-SUB($\Pi$).

Destacamos que ao considerar $\Pi$ como um emparelhamento perfeito $M$ entre vértices de mesmo rótulo em $G$ e $\overline{G}$, o problema COMP-SUB($\Pi$) coincide com o reconhecimento de prismas complementares, que pode ser feito em tempo polinomial [18]. Além da generalização de prismas complementares, a introdução do problema COMP-SUB($\Pi$)

é justificada por aspectos da área de Complexidade Parametrizada [45], que veremos a seguir.

Seja $\mathcal{C}$ a classe de grafos que podem ser decompostos em $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$. Um exemplo conveniente do interesse em reconhecer se um grafo $H$ pertence a $\mathcal{C}$ é dado sobre o problema da $k$-COLORAÇÃO DE VÉRTICES. Sabemos que o tamanho da clique máxima de um grafo $H$ é um limitante inferior para qualquer coloração própria dos vértices de $H$. Assim, se $H \in \mathcal{C}$, então pela Teoria de Ramsey, ou $H$ é uma instância-*não* de $k$-COLORAÇÃO DE VÉRTICES, ou a ordem de $H$ é limitada por uma função de $k$. Em geral, para todo problema de decisão $P$ em que a existência de uma $k$-clique ou um $k$-conjunto independente é suficiente para certificar *sim* ou *não*, segue que $P$ é trivialmente solucionável em tempo FPT quando parametrizado por $k$. Sendo assim, a Teoria de Ramsey para grafos [46, Cap. 9] é um instrumento fundamental para prover um resultado para COMP-SUB($\Pi$), com $\Pi$ geral, em classes de grafos definidas por uma $k$-clique ou um $k$-conjunto independente como subgrafo proibido. Tal resultado segue na Proposição 3.2.

Recordando algumas definições, sejam $P$ e $P'$ dois problemas de decisão. O problema $P$ é *polinomialmente redutível* a $P'$, denotado por $P \propto P'$, se existe um algoritmo $R$ que mapeia qualquer instância $I$ de $P$ em uma instância equivalente $I'$ de $P'$, no qual $R$ executa em tempo polinomial sobre $|I|$. Os problemas $P$ e $P'$ são *polinomialmente equivalentes* se $P \propto P'$ e $P' \propto P$. Dizemos que $P$ é *trivial* se toda instância-*sim* de $P$ tem tamanho limitado por uma constante.

**Proposição 3.2** *Sejam $k \in \mathbb{N}$ uma constante e $\mathcal{C}$ uma classe de grafos tal que nenhum dos seus grafos contém uma $k$-clique ou nenhum dos seus grafos contém um $k$-conjunto independente. Então* COMP-SUB($\Pi$) *restrito a $\mathcal{C}$ é trivial, para qualquer propriedade de arestas $\Pi$.*

*Prova*. Sejam $k \in \mathbb{N}$ uma constante, $\mathcal{C}$ uma classe de grafos tal que nenhum dos seus grafos contem uma clique de tamanho $k$ e $\Pi$ uma propriedade de arestas. Seja $H = (V,E) \in \mathcal{C}$. Se $H$ é instância-*sim* de COMP-SUB($\Pi$) então $V(H)$ pode ser particionado em $V_1, V_2$ tal que $H[V_1]$ é isomorfo ao complemento de $H[V_2]$. Como $H$ é livre de $K_k$, então $H[V_1]$ e $H[V_2]$ não têm nem uma clique de tamanho $k$ nem um conjunto independente de tamanho $k$. Assim, pelo Teorema de Ramsey segue que a cardinalidade de $V_1$ e de $V_2$ é limitada por uma função $R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1}$ [77]. O argumento é similar para classes de grafos tais que nenhum dos seus grafos contem um conjunto independente de tamanho $k$. Portanto, COMP-SUB($\Pi$) restrito a $\mathcal{C}$ tem um número finito de instâncias-*sim*. □

A partir da Proposição 3.2 obtemos que para uma propriedade qualquer de arestas $\Pi$, COMP-SUB($\Pi$) é trivialmente solucionável em tempo polinomial em grafos

bipartidos, planares e cúbicos, já que cada uma destas classes de grafos são livres de $K_5$. Obviamente, existem constantes $k$ suficientemente grandes para as quais o problema COMP-SUB($\Pi$) não se torna eficientemente resolvível na prática.

Embora tenhamos definido o problema COMP-SUB($\Pi$) para uma propriedade de arestas $\Pi$ qualquer, estamos particularmente interessados em outras propriedades $\Pi$ com estruturas bem definidas para $M$. Começamos com COMP-SUB($\Pi$) quando $\Pi$ é $M = \emptyset$, denotado por COMP-SUB($\Pi_\emptyset$), que segue na Seção 3.1. Em seguida, na Seção 3.2 são feitas algumas observações do caso $\Pi_{K_{n,n}}$ que é definido como $M$ induz um grafo bipartido completo. Por fim, a Seção 3.3 contém alguns resultados do caso em que $M$ induz um emparelhamento perfeito, denotado por $\Pi_{\text{PERF}}$.

## 3.1 Quando $M$ é vazio

Nesta seção, consideramos o problema COMP-SUB($\Pi_\emptyset$), em que $\Pi_\emptyset$ denota o conjunto de corte $M$ igual a vazio. Neste caso, a decomposição complementar $(G, \overline{G})$ também particiona conjunto de vértices e de arestas de $H$, isto é, $V(H) = V(G) \cup V(\overline{G})$ e $E(H) = E(G) \cup E(\overline{G})$.

Alguns resultados auxiliares nos ajudam a mapear questões relevantes sobre o problema. Na Proposição 3.3, mostramos condições necessárias relacionadas à quantidade de arestas e de vértices das instâncias-*sim* de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$).

**Proposição 3.3** *Seja $H$ um grafo de ordem $2n$. Se $H \in$ COMP-SUB($\Pi_\emptyset$), então*

*(i) $H$ tem exatamente $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas.*

*(ii) $H$ tem uma componente conexa com exatamente $n$ vértices.*

*Prova.* Suponha que $H \in$ COMP-SUB($\Pi_\emptyset$). Então, $H$ pode ser decomposto em $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio.

$(i)$ Como $G$ é o complemento de $\overline{G}$, claramente

$$|E(H)| = |E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$(ii)$ Sejam $H_1, \ldots, H_\ell$ as componentes conexas de $H$. Como $M = \emptyset$ então ou $V(H_i) \subseteq V(G)$ ou $V(H_i) \subseteq V(\overline{G})$, para todo $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Note que ou $G$ ou $\overline{G}$ é desconexo, portanto ou $G$ ou $\overline{G}$ possui vértices de apenas uma componente. □

A partir da Proposição 3.3, mostramos no Teorema 3.4 que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) em grafos gerais é polinomialmente equivalente ao problema ISOMORFISMO DE GRAFOS. Entretanto, evidenciamos um contraste nas complexidades de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$)

e ISOMORFISMO. Por exemplo na classe dos grafos bipartidos, ISOMORFISMO é GI-completo [10] enquanto que COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ é trivialmente solucionável em tempo polinomial (Proposição 3.2).

**Teorema 3.4** COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ *é* GI*-completo.*

*Prova*. Mostramos primeiro que ISOMORFISMO $\propto$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$.

Seja $(H_1, H_2)$ uma instância de ISOMORFISMO. Crie uma instância de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ como o grafo $H$ obtido pela união disjunta $H_1 \cup \overline{H}_2$.

Seja $(H_1, H_2)$ uma instância-*sim* de ISOMORFISMO. Então $H_1 \simeq H_2$ e, pela construção, $G = H_1$ e $\overline{G} = \overline{H}_2$ definem uma decomposição de $H$ em $G$ e seu complemento $\overline{G}$, com conjunto de corte $M = \{uv \in E(H) : u \in V(G) \text{ e } v \in V(\overline{G})\} = \emptyset$. Por outro lado, seja $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Então $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $H_1$ é conexo. Assim, podemos assumir que $G = H_1$ e $\overline{G} = \overline{H}_2$. Portanto, $H_1 \simeq H_2$ e COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ é GI-difícil.

A seguir, mostramos que COMP-SUB$(\Pi_\emptyset) \propto$ ISOMORFISMO.

Seja $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Pela Proposição 3.3, se $H$ é uma instância-*sim*, então, $H$ tem uma componente conexa $H'$ com exatamente $\frac{|V(H)|}{2}$ vértices. Crie uma instância $(H_1, H_2)$ de ISOMORFISMO tal que $H_1 = H'$ e $H_2 = \overline{H[V(H) \setminus V(H')]}$.

Mostramos que $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ se e somente se $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO.

Se $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$, então $H'$ e $H[V(H) \setminus V(H')]$ é uma decomposição complementar de $H$ tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Assim, temos que $H' \simeq \overline{H[V(H) \setminus V(H')]}$, logo, pela construção, $H_1 \simeq H_2$. Portanto $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO.

Para a recíproca, se $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO, então $H_1 \simeq H_2$. Assim, pela construção temos que $H' = H_1$ e $H[V(H) \setminus V(H')] = \overline{H}_2$ é uma decomposição complementar de $H$ com conjunto de corte $M = \{uv \in E(H) : u \in V(H') \text{ e } v \in V(H) \setminus V(H')\} = \emptyset$. Portanto $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Logo, COMP-SUB$(\Pi_\emptyset) \in$ GI. □

Nos seguintes Lemas 3.5 e 3.7 apresentamos classes de grafos onde a equivalência entre COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ e ISOMORFISMO é válida.

**Lema 3.5** *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de grafos fechada sob complemento e fechada sob união disjunta. Então* COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ *em $\mathcal{C}$ é polinomialmente equivalente a* ISOMORFISMO *em $\mathcal{C}$.*

*Prova*. Seja $H \in \mathcal{C}$ uma instância de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ com $2n$ vértices. Criamos uma instância $(H_1, H_2)$ de ISOMORFISMO tal que $H_1 = G$ e $H_2 = \overline{H[V(H) \setminus V(G)]}$, onde $G$ é uma componente conexa de $H$ com $n$ vértices.

Suponha que $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Então $H$ pode ser decomposto em $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Como $\mathcal{C}$ é hereditária, então $G, \overline{G} \in \mathcal{C}$. Como $H$ é uma instância-*sim*, temos que, pela construção, $H_1 \simeq H_2$. Portanto, $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$.

Suponha que $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$. Então, temos que $H_1 \simeq H_2$ e $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$. Logo, $G = H_1$ e $\overline{G} = \overline{H_2} = H[V(H) \setminus V(G)]$ definem uma decomposição de $H$ com conjunto de corte $M = \emptyset$. Portanto, $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ em $\mathcal{C}$.

Agora, mostramos ISOMORFISMO $\propto$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ em $\mathcal{C}$.

Seja $(H_1, H_2)$ uma instância de ISOMORFISMO. Crie uma instância $H$ de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ como $H = H_1 \cup \overline{H}_2$.

Suponha que $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$. Assim, temos que $H_1 \simeq H_2$ e $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$. Pela construção, temos que $G = H_1$ e $\overline{G} = \overline{H}_2$ definem uma decomposição complementar de $H$ com conjunto de corte $M = \emptyset$. Como $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$, e $\mathcal{C}$ é fechada sob complemento, então $G, \overline{G} \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ é fechada sob união disjunta, então $H = G \cup \overline{G} \in \mathcal{C}$. Logo, $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ em $\mathcal{C}$.

Por outro lado, suponha que se $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Então $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Pela construção, podemos assumir que $G = H_1$ e $\overline{G} = \overline{H}_2$. Como $\mathcal{C}$ é fechada sob complemento, temos que $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$. Como $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$, temos que $\overline{H}_2$ é isomorfo ao complemento de $H_1$, e assim, $H_1 \simeq H_2$. Logo, $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$, o que completa a prova. □

Como ISOMORFISMO pode ser resolvido em tempo linear para grafos de permutação [42], o Lema 3.5 anterior implica no resultado seguinte.

**Corolário 3.6** COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ *pode ser resolvido em tempo linear para grafos de permutação.*

*Prova*. Seja $\mathcal{C}$ a classe dos grafos de permutação e $H \in \mathcal{C}$ um grafo com $2n$ vértices. Suponha que $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Então, $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Como $\mathcal{C}$ é hereditária, fechada sob complemento e fechada sob união disjunta [75],

o Lema 3.5 implica que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) é polinomialmente equivalente a ISOMORFISMO restrito a $\mathcal{C}$.

Sabemos que $|V(G)| = |V(\overline{G})| = n$, e pela Proposição 3.3, $|E(H)| = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$, o que significa que em tempo linear com respeito a $E(H)$ podemos computar $\overline{G}$. Como uma componente conexa de $H$ pode ser determinada em tempo linear com respeito a $V(H)$, temos que a redução apresentada no Lema 3.5 pode ser realizada em tempo linear.

Como ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$ pode ser resolvido em tempo linear [42], segue que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) pode ser resolvido em tempo linear para grafos de permutação. □

**Lema 3.7** *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de grafos fechada sob complemento. O problema da determinar se um grafo $H$ pode ser decomposto em dois grafos $G$ e $\overline{G}$ tal que $G \in \mathcal{C}$ e $M = \emptyset$ é polinomialmente equivalente a* ISOMORFISMO *na classe $\mathcal{C}$.*

*Prova*. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de grafos fechada sob complemento. Mostramos primeiro que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) $\propto$ ISOMORFISMO.

Seja $H$ uma instância de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) com $2n$ vértices. Crie uma instância $(H_1, H_2)$ de ISOMORFISMO como segue: $H_1 = G$ e $H_2 = \overline{H[V(H) \setminus V(G)]}$, onde $G$ é um a componente conexa maximal de $H$ com $n$ vértices. (Pela Proposição 3.3 podemos assumir que tal componente existe).

Suponha que $H \in$ COMP-SUB($\Pi_\emptyset$). Então, existe uma decomposição de $H$ em $G$ e seu complemento $\overline{G}$ tal que $M = \{uv \in E(H) : u \in V(G) \text{ e } v \in V(\overline{G})\} = \emptyset$. Como $G \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada sob complemento, temos que $\overline{G} \in \mathcal{C}$. Assim, pela construção, $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$ e $H_1 \simeq H_2$. Logo, $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$.

Suponha que $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$. Então, temos que $H_1 \simeq H_2$ e $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$. Pela construção, temos que $G$ e seu complemento $\overline{G}$ definem uma decomposição de $H$ com conjunto de corte $M = \emptyset$. Portanto, $H$ pode ser decomposto em dois grafos $G$ e $\overline{G}$ tais que $G \in \mathcal{C}$.

Agora, mostramos ISOMORFISMO $\propto$ COMP-SUB($\Pi_\emptyset$). Seja $(H_1, H_2)$ uma instância de ISOMORFISMO. Defina uma instância de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) como $H = H_1 \cup \overline{H}_2$. Mostramos que $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$ se e somente se $H$ pode ser decomposto em dois grafos $G$ e $\overline{G}$ tal que $G \in \mathcal{C}$.

Suponha que $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$. Assim, temos que $H_1 \simeq H_2$ e $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$. Pela construção, temos que $G = H_1$ e $\overline{G} = \overline{H}_2$ é uma partição complementar de $H$ com conjunto de corte $M = \emptyset$. Como $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$, então $G, \overline{G} \in \mathcal{C}$.

Por outro lado, suponha que $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G \in \mathcal{C}$ e seu complemento $\overline{G}$, tal que $M = \{uv \in E(H) : u \in V(G) \text{ e } v \in V(\overline{G})\} = \emptyset$. Como $\mathcal{C}$ é fechada sob complemento, temos que $\overline{G} \in \mathcal{C}$. Pela construção, temos que $G = H_1$ e $\overline{G} = \overline{H}_2$. Como

$H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$), temos que $\overline{H}_2$ é o complemento de $H_1$, e assim, $H_1 \simeq H_2$. Como $G, \overline{G} \in \mathcal{C}$, pela construção $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$. Logo, $(H_1, H_2)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$, o que completa a prova. □

Lema 3.7 implica nos Corolários 3.8 e 3.9.

**Corolário 3.8** COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) *pode ser resolvido em tempo linear para grafos de comparabilidade ou de co-comparabilidade.*

*Prova*. Seja $H$ um grafo de comparabilidade (resp. co-comparabilidade). Suponha que $H \in$ COMP-SUB($\Pi_\emptyset$). Então, existe uma partição de $H$ em subgrafos complementares $G$ e $\overline{G}$ tal que $M = \{uv \in E(H) : u \in V(G) \text{ e } v \in V(\overline{G})\} = \emptyset$. Como comparabilidade é uma propriedade hereditária, $G$ e $\overline{G}$ são grafos de comparabilidade (resp. co-comparabilidade). Golumbic [75] mostra que $G$ e seu complemento $\overline{G}$ são grafos de comparabilidade (resp. co-comparabilidade) se e somente se $G$ e $\overline{G}$ são grafos de permutação.

Seja $\mathcal{C}$ a classe de grafos de permutação. Como $\mathcal{C}$ é fechada sob complemento, e ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$ é solucionável em tempo linear [42], o Lema 3.7 implica que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) em $\mathcal{C}$ pode ser resolvido em tempo linear. Perceba que a redução apresentada no Lema 3.7 depende apenas de computar uma componente conexa $G$ de $H$ e o complemento de $H[V(H) \setminus V(G)]$. Por argumentação similar à prova do Corolário 3.6, obtemos que tal redução pode ser feita em tempo linear. Portanto, segue que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) pode ser resolvido em tempo linear para grafos de comparabilidade e de co-comparabilidade. □

Como a classe dos grafos de permutação contém os cografos [43], e os grafos de intervalo (resp. co-intervalo) formam uma subclasse de co-comparabilidade (resp. comparabilidade) [75], pelos Corolários 3.6 e 3.8 evidenciamos que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) pode ser resolvido em tempo linear para cografos, grafos de intervalo e grafos de co-intervalo. Ainda pelo Lema 3.7, obtemos no Corolário 3.9 um resultado de complexidade de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) restrito a grafos cordais.

**Corolário 3.9** COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) *em grafos cordais permanece* GI*-completo.*

*Prova*. Seja $H$ um grafo cordal. Suponha que $H \in$ COMP-SUB($\Pi_\emptyset$). Então, $H$ pode ser decomposto em $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Como cordalidade é uma propriedade hereditária, segue que $G$ e $\overline{G}$ também são cordais. De acordo com Golumbic [75], um grafo $G$ e seu complemento $\overline{G}$ são ambos cordais se e somente se $G$ e $\overline{G}$ são grafos *split*. Além disso, $G$ é *split* se e somente se seu complemento $\overline{G}$ é um grafo *split* [75].

Note que se um grafo $H$ pode ser decomposto em dois grafos $G$ e $\overline{G}$ tal que $G$ e $\overline{G}$ são ambos grafos *split*, então $H$ é cordal. Portanto, pelo Lema 3.7, temos que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) em grafos cordais é polinomialmente equivalente a ISOMORFISMO em grafos *split*. Como ISOMORFISMO em grafos *split* é GI-completo [38], então COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) em grafos cordais é GI-completo. □

Tendo em vista o resultado de complexidade obtido no Corolário 3.9 procedemos nas Subseções 3.1.1–3.1.5 com COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) em subclasses de grafos cordais.

### 3.1.1 Grafos Fortemente Cordais

Lembramos que um grafo $H$ é *fortemente cordal* se $H$ é cordal e livre de $sun_k$, para todo $k \geq 3$. Agora, consideramos COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) quando o grafo de entrada $H$ é fortemente cordal.

**Proposição 3.10** COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) *para grafos fortemente cordais é polinomialmente equivalente a* ISOMORFISMO *para grafos split livres de* $\{sun_3, sun_4, net\}$.

*Prova*. Seja $H$ um grafo fortemente cordal. Considere $H \in$ COMP-SUB($\Pi_\emptyset$). Então, $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Como $H$ é fortemente cordal, temos que $G$ e $\overline{G}$ também são. Isso implica que $G$ e $\overline{G}$ são *split* livres de $sun_k$, $k \geq 3$. Como $\overline{G}$ é o complemento de $G$, e vice-versa, temos que $G$ e $\overline{G}$ são livres de *co-*$sun_k$, $k \geq 3$.

Sabemos que $sun_4$ é autocomplementar e o complemento de um $sun_3$ é uma *net*. Como $G$ é livre de *net*, então $G$ é livre de $sun_k$, para $k \geq 5$, (veja na Figura 3.1 um exemplo de uma *net* induzida em um $sun_5$). Logo, obtemos que $G$ e $\overline{G}$ são livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$. Como a classe $\mathcal{C}$ de grafos livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$ é fechada sob complemento, e $G \in \mathcal{C}$, o Lema 3.7 implica que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) é polinomialmente equivalente a ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$. □

A Figura 3.1 mostra um grafo $sun_5$ com uma *net* induzida em destaque.

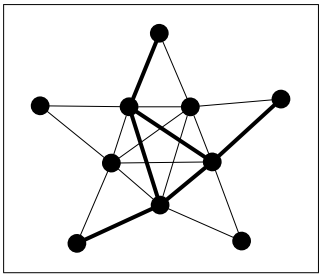


**Figura 3.1:** *Uma net induzida em um* $sun_5$.

Dado um grafo *split* $H = (C \cup I, E)$, lembramos que o *grafo de componentes* $H'$ de $H$ é o grafo bipartido obtido a partir de $H$ através da remoção das arestas do grafo induzido por $C$. A notação $nt(H')$ especifica o número de componentes conexas não triviais de $H'$.

Até onde sabemos, ISOMORFISMO em grafos *split* livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$ é um problema em aberto. Apesar disso, mostramos como resolver ISOMORFISMO para dois grafos *split* $H_1$ e $H_2$ livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$, quando o número de componentes não triviais de $H_1'$ e de $H_2'$ é igual a 2. Este resultado é uma consequência do Teorema 3.11 que será apresentado a seguir. Perceba que se $nt(H_1') \geq 3$, então $H_1'$ contém $3K_2$ como subgrafo induzido. Consequentemente $H_1$ não é livre de *net*, o que está fora do nosso caso.

**Teorema 3.11** *Seja $H = G \cup \overline{G}$ um grafo fortemente cordal. Se $nt(G') = 2$, então* COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ *em $H$ pode ser decidido em tempo polinomial.*

*Prova.* Seja $H = G \cup \overline{G}$ um grafo fortemente cordal. Considerando que $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$, sabemos pela Proposição 3.10 the $G$ e $\overline{G}$ são também grafos *split* livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$. Seja $C \cup I$ uma partição *split* de $V(G)$ tal que $C$ é uma clique e $I$ é um conjunto independente. Como $G$ é livre de *net*, segue que $G'$ é livre de $3K_2$. Suponha que $nt(G') = 2$, e sejam $A$ e $B$ as componentes não triviais de $G'$. Como $G'$ é livre de $3K_2$ e $|V(A)|, |V(B)| \geq 2$, obtemos que $A$ e $B$ são livres de $2K_2$. Afirmamos que $G$ é um grafo *split* permutação.

**Afirmação 3.12** *$G$ é um grafo split permutação.*

*Prova. (da Afirmação 3.12).* Sabemos que um grafo *split* permutação é livre de $\{2K_2, C_4, C_5, sun_3, net$, *rising sun*, *co-rising sun*$\}$ [86]. Assim, resta provar que $G$ é livre de $\{$*rising sun*, *co-rising sun*$\}$.

Suponha, por contradição, que $G$ contém um subgrafo induzido *rising sun* $R_1$ (resp. *co-rising sun* $R_2$), denotado como na Figura 3.2.

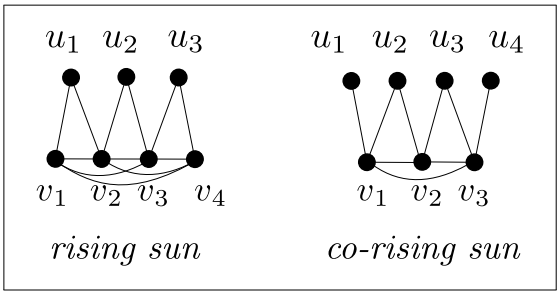



**Figura 3.2:** *Dois subgrafos proibidos de um grafo split permutação.*

Claramente, $u_i \in I$, para todo $i \in \{1,\ldots,3\}$ (resp. $i \in \{1,\ldots,4\}$), e $v_j \in C$, para todo $j \in \{1,\ldots,4\}$ (resp. $j \in \{1,\ldots,3\}$). Perceba que o grafo bipartido $R'_1$ (resp. $R'_2$), obtido pela remoção das arestas entre vértices de $C$, é conexo. Então todos os vértices $u_1,u_2,u_3$ (resp. $u_1,u_2,u_3,u_4$) devem pertencer ou a $A$ ou a $B$. Como $nt(G') = 2$, então existe $xy \in E(G')$, onde $x \in I$, $y \in C$, tal que $xv_i \notin E(G)$, para todo $i \in \{1,\ldots,4\}$ (resp. $i \in \{1,\ldots,3\}$), e $yu_j \notin E(G)$, para todo $j \in \{1,\ldots,3\}$ (resp. $j \in \{1,\ldots,4\}$). Consequentemente, temos que $\{u_1,v_1,u_3,v_3,x,y\}$ induz uma *net* em $G$, uma contradição. □

Seja $\mathcal{C}$ a classe dos grafos *split* permutação. Como $\mathcal{C}$ é fechada sob complemento, e ISOMORFISMO em $\mathcal{C}$ é solucionável em tempo Polinomial (cf. [42]), o Lema 3.7 implica que COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ em $\mathcal{C}$ pode ser decidido em tempo polinomial. □

**Corolário 3.13** ISOMORFISMO *para dois grafos split $H_1$ e $H_2$ livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$, quando $nt(H'_1) = nt(H'_2) = 2$ pode ser decidido em tempo polinomial.*

*Prova*. Pela Proposição 3.10, COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ para grafos fortemente cordais é polinomialmente equivalente a ISOMORFISMO para grafos *split* livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$. Assim, o Teorema 3.11 implica diretamente no resultado desejado. □

**Teorema 3.14** *Seja $H = H_1 \cup H_2$ um grafo fortemente cordal tal que $nt(H'_1) = 1$ e $nt(\overline{H}'_1) = 1$. Se $H_1$ contém ou um rising-sun ou um co-rising-sun como subgrafo induzido, mas não ambos, então* COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ *para $H$ pode ser decidido em tempo polinomial.*

*Prova*. Suponha primeiro que $H_1$ contém um *co-rising-sun* e não contém *rising-sun* como subgrafo induzido. Se $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$, então $\overline{H}_2$ não contém um *rising-sun* como subgrafo induzido. Isso implica que $H_1$ e $\overline{H}_2$ são grafos *split* livres de $\{sun_3, sun_4, net, rising\text{-}sun\}$. Então, de acordo com Mahadev e Peled [86], $H_1$ e $\overline{H}_2$ são grafos de intervalo. Como ISOMORFISMO restrito a grafos de intervalo pode ser resolvido em tempo linear [11], o resultado segue testando isomorfismo entre $H_1$ e $\overline{H_2}$.

Se $H_1$ contém um *rising-sun* e não contém *co-rising-sun* como subgrafos induzidos, então, por argumentação similar ao parágrafo anterior, temos que $\overline{H}_1$ e $H_2$ são grafos de intervalo, o que completa a prova. □

Provamos no Teorema 3.20 que grafos *split* livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$ formam uma subclasse dos grafos *split 2-threshold*. Lembramos que um grafo $H$ é *2-threshold* se $H$ pode ser obtido pela união de arestas de dois grafos *threshold*. Apresentamos primeiro alguns resultados auxiliares e definimos o grafo de conflito $H^*$ de um grafo $H$. Duas arestas de um grafo $H$ *conflitam* se seus extremos induzem em $H$ um $C_4$, um $P_4$ ou um

$2K_2$ (note que estes são exatamente os subgrafos proibidos de um grafo *threshold*, mas em geral um grafo de conflito pode ser definido para qualquer conjunto de subgrafos proibidos). Em um grafo *split* $H = (C \cup I, E)$, se duas arestas $e$ e $f$ de $H$ conflitam, então $e$ (e $f$) tem exatamente uma extremidade em $C$ e uma em $I$.

**Definição 3.15** *[86] O grafo de conflito $H^*$ de um grafo $H$ é construído como segue:*

$$V(H^*) = E(H),$$
$$E(H^*) = \{ef : e \text{ e } f \text{ conflitam em } H\}.$$

**Teorema 3.16** *[86] Um grafo $H$ é 2-threshold se e somente se o grafo de conflito $H^*$ é bipartido.*

Veja na Figura 3.3 um grafo $H$ e o seu respectivo grafo de conflito $H^*$. Note que $H$ é um grafo 2-*threshold*. Por exemplo, uma partição 2-*threshold* de suas arestas pode ser dada por $A = \{e_1, e_2, e_3, e_7\}$ e $B = \{e_4, e_5, e_6, e_8, e_9\}$. Note que podem existir vértices que estão tanto em $H[A]$ quanto em $H[B]$.

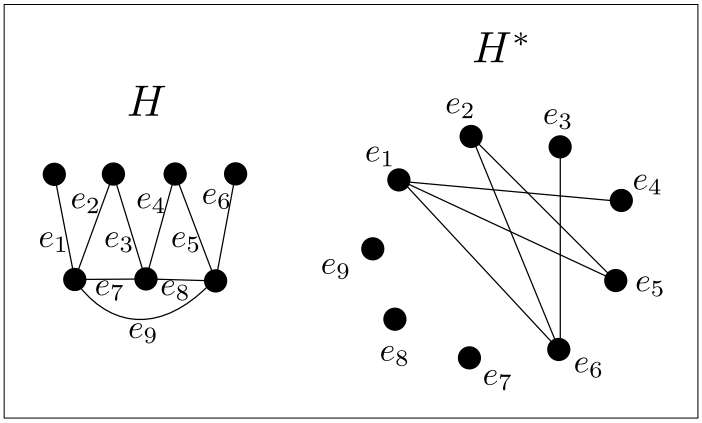



**Figura 3.3:** *Um co-rising sun $H$ e seu grafo de conflito $H^*$.*

Definimos também um subgrafo induzido $\mathcal{X}(C_k)$ do grafo bipartido $H'$, para $k \geq 3$, o qual expressa as arestas que conflitam em um ciclo induzido $C_k$ em $H^*$, que segue na Definição 3.17. A Figura 3.4 contém um exemplo de $\mathcal{K}_{5,5}$.

**Definição 3.17** *Seja $H = (C \cup I, E)$ um grafo split, $H^*$ o grafo de conflito de $H$, e $C_k$ um ciclo induzido em $H^*$, para $k \geq 3$. Além disso, seja $V(C_k) = \{e_1, \ldots, e_k\}$, onde $e_i = u_i v_i \in E(H)$, e $u_i \in I$, $v_i \in C$, para todo $1 \leq i \leq k$.*

*Seja $K_{k,k}$ um grafo bipartido completo com conjunto de vértices $\{u_i \in I, v_i \in C : 1 \leq i \leq k\}$. Construímos um grafo $\mathcal{K}_{k,k}$ pela remoção das arestas $\{u_p v_{p+1}, u_{p+1} v_p : 1 \leq p \leq k-1\} \cup \{u_k v_1, u_1 v_k\}$ de $K_{k,k}$. Denotamos $E(\mathcal{K}_{k,k}) = E_0 \cup E_+ \cup E_-$ onde, para todo*

$i, j \in \{1,\ldots,k\}$, e $\ell \in \{1,\ldots,\frac{k^2-3k}{2}\}$,

$$E_0 = \{e_i = u_i v_j : i = j\},\ E_+ = \{e_{\ell+} = u_i v_j : i < j\},\ E_- = \{e_{\ell-} = u_i v_j : i > j\}.$$

*Seja $H'$ o grafo de componentes de $H$. O subgrafo induzido $\mathcal{X}(C_k)$ de $H'$ é definido por:*

$$\mathcal{X}(C_k) = H'[E(H') \cap E(\mathcal{K}_{k,k})].$$

Na maior parte da prova do Teorema 3.20 analisamos as arestas que podem estar presentes ou não em $\mathcal{X}(C_5)$. Para tal, definimos uma representação simplificada de $E(\mathcal{X}(C_5))$ em termos de um vetor $\nu$.

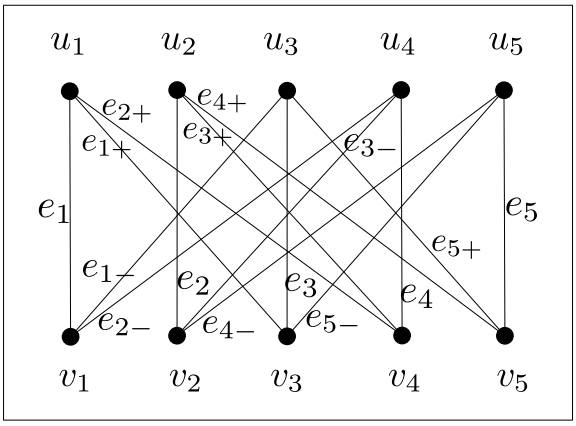



**Figura 3.4:** *Grafo $\mathcal{K}_{5,5}$ com respectivo vetor de conflito* $\nu = [2,2,2,2,2]$.

**Definição 3.18** *O vetor de conflito $\nu = [\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_5]$ do grafo $\mathcal{X}(C_5)$ é definido por:*

$$\underset{\ell\in\{1,\ldots,5\}}{\varepsilon_\ell} = \begin{cases} 0, & \text{se } e_{\ell-} \in E(\mathcal{X}(C_5)) \text{ e } e_{\ell+} \notin E(\mathcal{X}(C_5)) \\ 1, & \text{se } e_{\ell+} \in E(\mathcal{X}(C_5)) \text{ e } e_{\ell-} \notin E(\mathcal{X}(C_5)) \\ 2, & \text{se } e_{\ell-}, e_{\ell+} \in E(\mathcal{X}(C_5)). \end{cases}$$

Por exemplo, o grafo da Figura 3.4 tem vetor de conflito $\nu = [2,2,2,2,2]$.

Agora, definimos algumas transformações em um vetor de conflito $\nu$. Por brevidade, nos referimos ao grafo induzido por $\nu$ como o grafo induzido pelas arestas de $E(\mathcal{X}(C_5))$ representadas em $\nu$.

**Lema 3.19** *Seja $\nu = [\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_5]$ um vetor de conflito. Então:*

*(i) Seja $f$ a função de x-reflexão $f(\nu) = [f'(\varepsilon_1), \ldots, f'(\varepsilon_5)]$ na qual*

$$\underset{\ell \in \{1,\ldots,5\}}{f'(\varepsilon_\ell)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \varepsilon_\ell = 0, \\ 0, & \text{se } \varepsilon_\ell = 1, \\ 2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Os grafos induzidos por $\nu$ e $f(\nu)$ são isomorfos.*

*(ii) Seja $g$ a função de y-reflexão $g(\nu) = [\varepsilon_5, \varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1]$ onde $\nu = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5]$.*
*Os grafos induzidos por $\nu$ e $g(\nu)$ são isomorfos.*

*(iii) Os grafos induzidos por $\nu$ e $f(g(\nu))$ (resp. $g(f(\nu))$) são isomorfos.*

*Prova*. Itens (i)-(ii) seguem pelo fato de que $H[\nu]$ e $H[f(\nu)]$ (resp. $H[g(\nu)]$) são isomorfos, a menos dos rótulos dos vértices. Item (iii) segue por transitividade. □

Finalmente, podemos proceder com o Teorema 3.20.

**Teorema 3.20** *Seja $H$ um grafo split livre de $\{sun_3, sun_4, net\}$. Então $H$ é um grafo split 2-threshold.*

*Prova*. Seja $H = (C \cup I, E)$ um grafo *split* livre de $\{sun_3, sun_4, net\}$. Perceba que $H$ é *split* livre de $\{sun_3, sun_4, net\}$ se e somente se $H' = H \setminus E(C)$ é um grafo bipartido livre de $\{C_6, C_8, 3K_2\}$. Em vista disso, argumentamos com base nos subgrafos proibidos de $H'$.

Suponha, por contradição, que $H$ não é um grafo 2-threshold. Então, pelo Teorema 3.16, o grafo de conflito $H^*$ não é bipartido. Isso implica que $H^*$ contém um subgrafo induzido $C_k$, para algum $k \geq 3$ ímpar. Seja $\mathcal{X}(C_k)$ um subgrafo induzido de $H'$ como na Definição 3.17.

Suponha $k = 3$. Segue que, para todo $i, j \in \{1,2,3\}$ distinto, existe um conflito entre $e_i, e_j \in E(\mathcal{X}(C_3))$. Lembre que, como $H$ é *split*, $H$ não contém $2K_2$ nem $C_4$ como subgrafo induzido. Logo, se existe um conflito entre duas arestas de $H$ seus extremos induzem um $P_4$ em $H$, e um $2K_2$ em $H'$. Então, temos que o par de arestas $e_i, e_j$, para todo $i, j \in \{1,2,3\}$ distinto, induz um $2K_2$ em $\mathcal{X}(C_3)$. Consequentemente, $\{e_1, e_2, e_3\}$ induz um $3K_2$ em $\mathcal{X}(C_3)$. Como $H'$ é $3K_2$ e $\mathcal{X}(C_3)$ é um subgrafo induzido de $H'$, obtemos uma contradição.

Suponha $k = 5$. Isso implica que $\{e_i, e_{i+1}\}$ induz um $2K_2$ em $\mathcal{X}(C_5)$, para todo $i \in \{1, \ldots, 4\}$, bem como $\{e_1, e_5\}$. Sabemos que não existe conflito entre $e_i, e_j$, para $i \in \{1, \ldots, 4\}$, $j \neq i+1$, e $i = 5, j \neq 1$. Então, temos que pelo menos uma das arestas $e_{\ell+}, e_{\ell-}$ pertence a $E(\mathcal{X}(C_5))$, para todo $\ell \in \{1, \ldots, 5\}$. Para o restante da prova, consideramos todos os casos possíveis de arestas em $E(\mathcal{X}(C_5))$, expressos em um vetor de conflito $\nu = [\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_5]$ como na Definição 3.18.

De acordo com o Lema 3.19(i), temos que todos os casos onde $\varepsilon_1 = 0$, isto é, $\nu = [0, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_5]$, tem um grafo isomorfo induzido por $f(\nu) = [1, f'(\varepsilon_2) \ldots, f'(\varepsilon_5)]$. Assim, desconsideramos os casos em que $\varepsilon_1 = 1$. Os casos onde $\varepsilon_1 = 2$, e $\varepsilon_5 = 0$, que significam $\nu = [2, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, 0]$, recaem nos casos $g(\nu) = [0, g'(\varepsilon_2), g'(\varepsilon_3),\ g'(\varepsilon_4), 2]$, pelo Lema 3.19(ii). Finalmente, os casos em que $\varepsilon_1 = 2$, e $\varepsilon_5 = 1$, que significam $\nu = [2, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, 1]$, recaem nos casos $f(g(\nu)) = [0, f'(g'(\varepsilon_2)), f'(g'(\varepsilon_3)),\ f'(g'(\varepsilon_4)), 2]$, pelo Lema 3.19(iii).

Reunindo tudo, isso significa avaliar $[0, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_5]$, com 81 casos, e $[2, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, 2]$, com 27 casos. Mencionamos que muitos destes 108 casos são resolvidos aplicando funções do Lema 3.19, e da observação de que a adição de arestas que não são corda nos subgrafos proibidos $C_6, C_8$ em $\mathcal{X}(C_5)$ mantém a existência do mesmo subgrafo proibido em $\mathcal{X}(C_5)$.

A título de exemplo, seja $\nu_1 = [0,0,0,0,1]$, veja na Figura 3.5(a). Temos que $\nu_1$ induz um $C_6$ (com arestas em negrito) em $\mathcal{X}(C_5)$. Aplicando $f(\nu_1)$ (Figura 3.5(b)), $g(\nu_1)$ (Figura 3.5(c)), $f(g(\nu_1))$ (Figura 3.5(d)), e adicionando as arestas $e_{3-}, e_{5+}$ a $E(\mathcal{X}(C_5))$ (Figura 3.5(e)), também temos um $C_6$ induzido em $\mathcal{X}(C_5)$. Perceba que esta argumentação é possível desde que $|C| = |I|$, for qualquer subgrafo proibido $F \in \{C_6, C_8, 3K_2\}$.

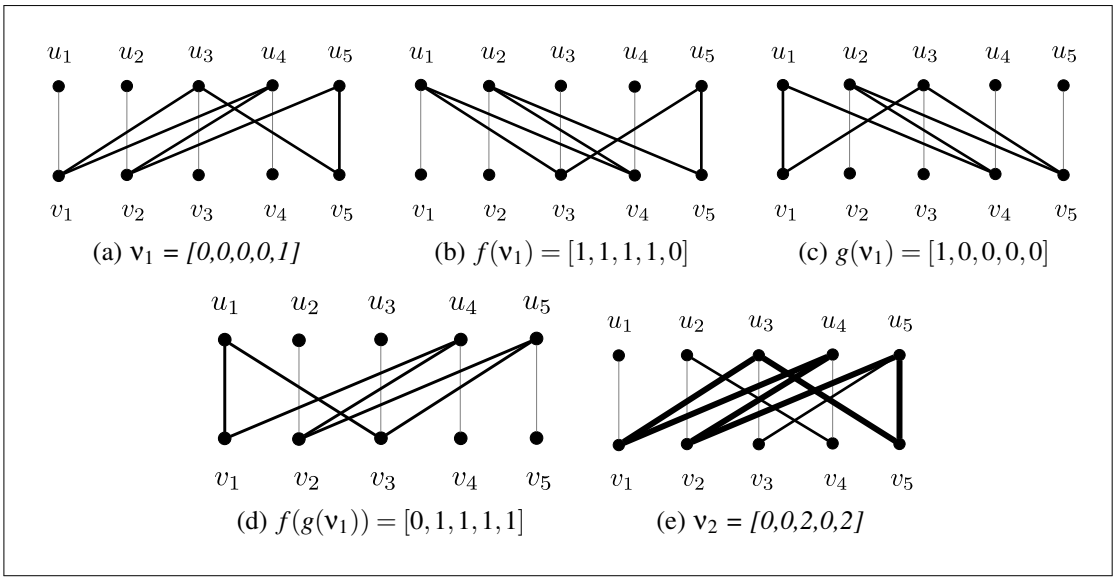



**Figura 3.5:** *Casos que exemplificam as funções do Lema 3.19 e a adição de arestas do tipo não-corda.*

Procedemos com os 108 casos, escritos na Tabela 3.1. Perceba que, com os argumentos mencionados anteriormente, a análise dos 108 casos pôde ser reduzida à análise de 10 casos, espetificados na primeira coluna da Tabela 3.1. Por brevidade, omitimos os colchetes e as vírgulas da notação de $\nu = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5]$. Cada caso tem um grafo $\mathcal{X}(C_5)$ correspondente, veja na Figura 3.6, ilustrando em arestas em negrito o subgrafo proibido $F \in \{C_6, C_8, 3K_2\}$ encontrado. Em todos os casos obtemos uma contradição.

**Tabela 3.1:** *Casos considerados para a prova do Teorema 3.20.*

| Caso ν | Subgrafo proibido $F$ induzido em $\mathcal{X}(C_5)$ | Casos que contém um subgrafo induzido proibido isomorfo a $F$ |
|---|---|---|
| 00000 | $C_6$, Figura 3.6(a) | 00002, 00020, 00022, 00200, 00202, 00220, 00222, 02000, 02002, 02020, 02022, 02200, 02202, 02220, 02222, 20002, 20022, 20202, 20222, 21112, 21212, 22002, 22022, 22202, 22212, 22222 |
| 00001 | $C_6$, Figura 3.5(a) | 00021, 00201, 01111, 01112, 01121, 01211, 01212, 01221, 02001, 02112, 02121, 02122, 02211, 02212, 02221 |
| 00010 | $C_8$, Figura 3.6(b) | 01000, 01002, 01020, 01200, 01202, 01220, 01222, 02010 |
| 00011 | $C_6$, Figura 3.6(c) | 00012, 00111, 00112, 00121, 00122, 00211, 00212, 00221, 02011, 02012, 02111, 20012, 20112, 20122, 20212, 21002, 21022, 21102, 21122, 21202, 21222, 22012, 22102, 22112, 22122 |
| 00100 | $C_8$, Figura 3.6(d) | 00102, 00120, 02100, 20102 |
| 00101 | $C_8$, Figura 3.6(e) | 01011, 01012, 01021, 01022, 02101, 21012 |
| 00110 | $C_8$, Figura 3.6(f) | 01100, 01102, 01120, 01122, 00210, 02102, 02110, 02120 |
| 01001 | $C_8$, Figura 3.6(g) | 01101, 01201, 02201, 02021 |
| 01010 | $3K_2$, Figura 3.6(h) | $\varnothing$ |
| 01110 | $C_8$, Figura 3.6(i) | 01210, 02210 |

Agora, seja $k \geq 6$. Perceba que o conjunto de vértices $\{u_1, u_2, u_3, u_{k-1}, u_k, v_1, v_2, v_3, v_{k-1}, v_k\}$ induz um $\mathcal{X}(C_5)$ em $\mathcal{X}(C_k)$. Então, encontramos subgrafos proibidos $C_6, C_8$ ou $3K_2$ em $\mathcal{X}(C_k)$ obtendo uma contradição como no caso $k = 5$. Portanto, concluímos que that $H$ é um grafo 2-*threshold*, e adicionalmente $H^*$ é bipartido cordal. □

Pelos Teoremas 3.11, 3.14 e 3.20, vale o seguinte Corolário 3.21. Mencionamos que, até onde sabemos, ISOMORFISMO em grafos 2-*threshold* é um problema em aberto.

**Corolário 3.21** *Seja $H$ um grafo fortemente cordal. Existe um algoritmo que, em tempo polinomial, ou decide se $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$, ou conclui que $H$ é a união disjunta de dois grafos split 2-threshold $H_1$ e $H_2$ de mesma ordem, tais que $nt(H_1) = nt(H_2) = 1$; $H_1$ e $H_2$ ambos contém rising-sun e co-rising-sun como subgrafos induzidos; e $H_1^*$ e $H_2^*$ são bipartidos cordais.*

### 3.1.2 Grafos de Intervalo Unitário

Tendo em vista que COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ pode ser resolvido em tempo linear para grafos de intervalo (Corolário 3.6), obtemos um resultado ainda mais específico na classe

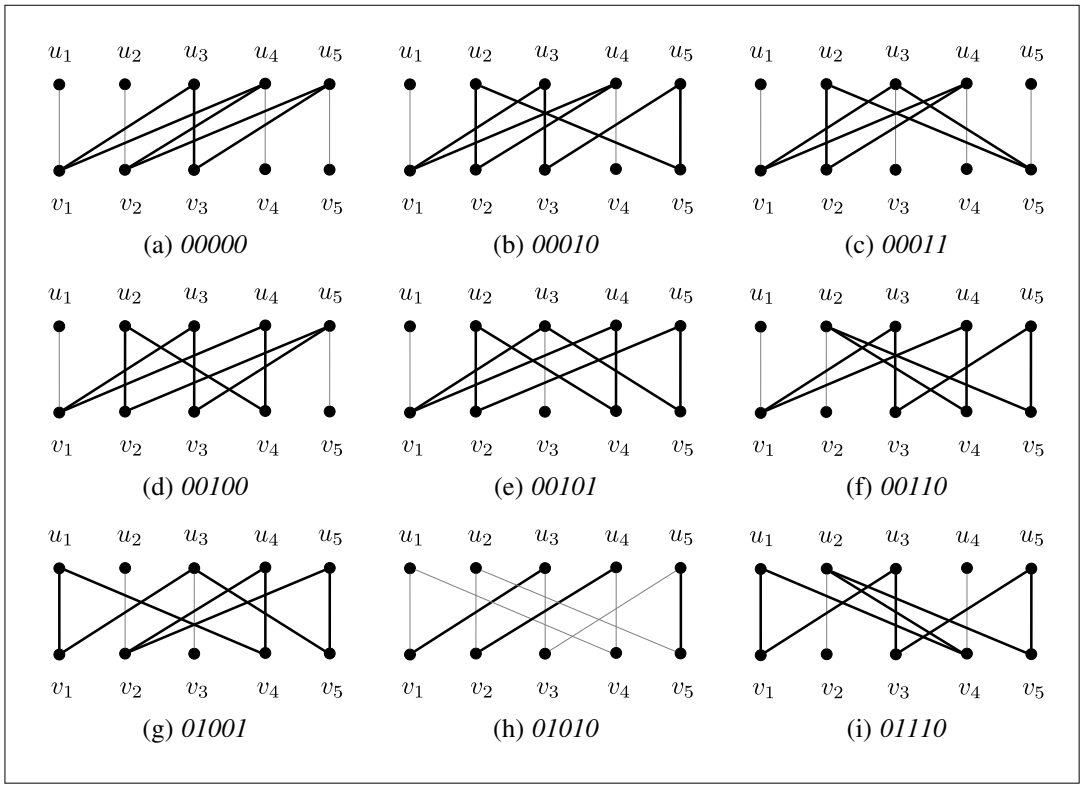



**Figura 3.6:** *Subgrafos proibidos em* $\mathcal{X}(C_5)$.

dos grafos de intervalo unitário, que segue na Proposição 3.22. Recordamos que um *grafo de intervalo unitário* é um grafo livre de $\{C_{n+4}, sun_3, K_{1,3}, net\}$, para todo $n \geq 0$.

**Proposição 3.22** *Seja $H$ grafo de intervalo unitário com $2n$ vértices. Então $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ se e somente se $H \in \{(\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell}), 2bull\}$, para $1 \leq \ell \leq 4$.*

*Prova*. Primeiro, suponha que $H \in \{(\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell}), 2bull\}$, para $1 \leq \ell \leq 4$. Perceba que $\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}$ é o complemento de $P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell}$, para $1 \leq \ell \leq 4$, e o *bull* é autocomplementar. Logo, $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$.

Suponha que $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Pela Proposição 3.3, existe uma componente conexa de $H$, digamos $G$, com exatamente $n$ vértices. Como $H$ é um grafo de intervalo unitário, então $G$ e $\overline{G}$ também o são. Então, $G$ (resp. $\overline{G}$) é cordal e livre de $\{sun_3, K_{1,3}, net\}$. Consequentemente, $\overline{G}$ (resp. $G$) é livre de $\{\overline{K_{1,3}}\} = \{K_3 \cup K_1\}$. Como $G$ e $\overline{G}$ são cordais, temos que $G$ e $\overline{G}$ são *split*. Seja $C \cup I$ uma partição *split* de $V(G)$, onde $C$ é é uma clique maximal e $I$ é um conjunto independente. Como $G$ é um grafo de intervalo unitário *split*, temos que $|I| \leq 2$ [91]. Consideramos três casos: $|I| \in \{0,1,2\}$.

**Caso 3.23** $|I| = 0$.

Neste caso temos que $G = C = K_n$. Assim, para $\ell = 1$, temos $H = (\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell})$.

**Caso 3.24** $|I| = 1$.

Seja $I = \{v\}$. Como $G$ é conexo, existe $x \in C$ tal que $vx \in E(G)$. Como $C$ é maximal, temos que existe $y \in C$ tal que $vy \notin E(G)$. Mostramos que $|C \setminus N_G(v)| \leq 2$. Suponha por contradição que $|C \setminus N_G(v)| \geq 3$. Isso implica que $(C \setminus N_G(v)) \cup \{v\}$ contém um subgrafo induzido $K_3 \cup K_1$, contradição.

Suponha que $C \setminus N_G(v) = \{y\}$. Temos que $\{v,y\}$ induz um $\overline{P}_2$ e consequentemente $G = \overline{P}_2 + K_{n-2}$. Logo, $(\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell})$, para $\ell = 2$.

Agora suponha que $C \setminus N_G(v) = \{y,y'\}$. Temos que $\{v,y,y'\}$ induz um $\overline{P}_3$ e consequentemente $G = \overline{P}_3 + K_{n-3}$. Logo, $H = (\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell})$, para $\ell = 3$.

**Caso 3.25** $|I| = 2$.

Seja $I = \{x,y\}$, $X = N_G(x) \setminus N_G(y)$ e $Y = N_G(y) \setminus N_G(x)$. Mostramos primeiro que $|X| \leq 1$ e $|Y| \leq 1$. Suponha, por contradição, que ou $|X| \geq 2$ ou $|Y| \geq 2$. Podemos considerar que $u,v \in X$. Temos que $\{u,v,x,y\}$ induz um $K_3 \cup K_1$, contradição. O caso $|Y| \geq 2$ é análogo. Agora, considere dois sub-casos.

**Caso 3.26** $N_G(x) \cap N_G(y) \neq \emptyset$.

Lembre que $|X|, |Y| \in \{0,1\}$. Como $G$ é $K_{1,3}$, temos que $C \setminus N_G(\{x,y\}) = \emptyset$. Primeiro, seja $|X| = 0$ e $|Y| = 0$. Temos que $G = H[\{x,y\}] + K_{n-2} = \overline{P}_2 + K_{n-2}$. Portanto $H = (\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell})$, para $\ell = 2$.

Seja $|X| = 1$ e $|Y| = 0$, com $X = \{v\}$. Neste caso, temos que $G = H[\{v,x,y\}] + K_{n-3} = \overline{P}_3 + K_{n-3}$. Logo, $H = (\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell})$, para $\ell = 3$. O caso $|X| = 0$ e $|Y| = 1$ é similar.

Agora, seja $|X| = 1$ e $|Y| = 1$, com $X = \{v\}$ e $Y = \{u\}$. Temos que $G = H[\{u,v,x,y\}] + K_{n-4} = P_4 + K_{n-4} = \overline{P}_4 + K_{n-4}$. Logo, $H = (\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell})$, para $\ell = 4$.

**Caso 3.27** $N_G(x) \cap N_G(y) = \emptyset$.

Sabemos que $|X|, |Y| \leq 1$. Como $G$ é conexo, então $|X|, |Y| = 1$.

Seja $W = C \setminus N_G(\{x,y\})$. Se $|W| = 0$, como $|X|, |Y| = 1$, temos que $G = P_4$. Logo, $H = (\overline{P}_4 + K_0) \cup (P_4 \cup \overline{K}_0)$.

Se $|W| = 1$, como $|X|, |Y| = 1$, temos que $G = bull$. Logo, $H = 2bull$.

Finalmente, considere $|W| \geq 2$. Seja $w,w' \in W$ e $N_G(y) = \{u\}$. Como $u,w,w' \notin N_G(x)$ e $u,w,w' \in C$, o conjunto $\{u,w,w',x\}$ induz um $K_3 \cup K_1$, uma contradição. □

### 3.1.3 Grafos *Starlike*

Recordamos que um grafo *starlike* é um grafo livre de $\{P_5, C_4, C_5, H_1, H_2, 2P_3\}$ (veja $H_1$ e $H_2$ na Figura 2.6). Nosso resultado de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) para esta classe de grafos segue na Proposição 3.28.

**Proposição 3.28** *Seja $H$ um grafo starlike com $2n$ vértices. Então, $H \in$ COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) se e somente se $H = (K_p + \overline{K}_q) \cup (\overline{K}_p \cup K_q)$, em que $p+q=n$.*

*Prova.* É claro observar que $H = (K_p + \overline{K}_q) \cup (\overline{K}_p \cup K_q)$ (para $p+q=n$) é uma instância-*sim* de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$). Agora, considere que $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB($\Pi_\emptyset$). Então, $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Além disso, pela Proposição 3.3, existe uma componente conexa de $H$, digamos $G$, com exatamente $n$ vértices.

Como $H$ é um grafo *starlike*, então $G$ e $\overline{G}$ também o são. Por definição, $G$ e $\overline{G}$ são livres de $\{P_5, C_4, C_5, H_1, H_2, 2P_3\}$. Como $\overline{G}$ é livre $C_4$, obtemos que $G$ é livre de $2K_2$. Assim, $G$ é *split* e $\overline{G}$ também. Considere uma partição *split* $C \cup I$ de $V(G)$, onde $C$ é uma clique maximal e $I$ é um conjunto independente.

Se $I = \emptyset$, então $G = C$ e $\overline{G} = \overline{C}$. Como $|V(G)| = |C| = n$, temos que $G = K_n$ e $\overline{G} = \overline{K}_n$, logo $H = (K_p + \overline{K}_q) \cup (\overline{K}_p \cup K_q)$, para $p = n$ e $q = 0$.

Agora, considere que $I \neq \emptyset$. Como $C$ é maximal, $|C| \geq 2$. Mostramos na Afirmação 3.29 que $\overline{G}$ é um grafo *cluster*, isto é, um grafo livre de $P_3$, ou equivalentemente, uma união disjunta de cliques. A seguir, mostramos que $\overline{G}$ tem no máximo uma clique com dois ou mais vértices.

**Afirmação 3.29** *$\overline{G}$ é um grafo cluster.*

*Prova. (da Afirmação 3.29).* Suponha por contradição, que $\overline{G}$ não é um grafo cluster. Então, existem $u, v, w \in V(\overline{G})$ tais que $\{u, v, w\}$ induz um $P_3$ em $\overline{G}$. Podemos considerar que $uv, uw \in E(P_3)$ e $vw \notin E(P_3)$. Como $H[\{u, v, w\}] \simeq P_3$, os três vértices $u, v, w$ não pertencem simultaneamente ao conjunto intependente $\overline{C}$ de $\overline{G}$ nem à clique $\overline{I}$ de $\overline{G}$. Além disso, perceba que $u \in \overline{C}$ implica $v, w \in \overline{I}$, o que contradiz o fato de que $\overline{I}$ é uma clique de $\overline{G}$, assim $u \in \overline{I}$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $w \in \overline{C}$. Se $u$ é um vértice universal em $\overline{G}$ então $G$ é desconexo, uma contradição. Assim, $u \in \overline{I}$, e existe $w' \in \overline{C}$ tal que $uw' \notin E(\overline{G})$, então $\{u, w, w'\}$ induz um $\overline{P_3}$ em $\overline{G}$. Consequentemente, $G \cup \overline{G}$ não é livre de $P_3$, uma contradição. □

Pela Afirmação 3.29, temos que $\overline{G}$ é uma união disjunta de cliques. Sejam $\overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_\ell$ as componentes conexas de $\overline{G}$. Como $\overline{G}$ é *split*, temos que $\overline{G}$ é livre de

$2K_2$. Isso implica que existe no máximo um $i \in \{1,\ldots,\ell\}$, tal que $|V(\overline{G}_i)| \geq 2$. Como $|V(\overline{G})| = n$, para $p+q=n$, definimos $\sum_{j\in\{1,\ldots,\ell\}\setminus\{i\}} |V(\overline{G}_j)| = p$ e $|V(\overline{G}_i)| = q$. Logo, $\overline{G} = \overline{K}_p \cup K_q$ e $G = \overline{\overline{K}_p \cup K_q} = K_p + \overline{K}_q$. Portanto, $H = (K_p + \overline{K}_q) \cup (\overline{K}_p \cup K_q)$, completando a prova. □

### 3.1.4 Grafos Bloco

Lembramos que um *diamond* é o grafo obtido pela remoção de exatamente uma aresta do grafo $K_4$. Um grafo *bloco* é livre de $\{diamond, C_{n+4}\}$, para todo $n \geq 0$. Especialmente nesta subseção, para facilitar a legibilidade, denotamos por $S_n$ o grafo bipartido completo $K_{1,n-1}$, que corresponde a uma estrela com $n$ vértices. Caracterizamos na Proposição 3.30 instâncias-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ quando $H$ é um grafo bloco.

**Proposição 3.30** *Seja $H$ um grafo bloco com $2n$ vértices. Então $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ se e somente se $H \in \{K_n \cup \overline{K}_n, S_n \cup \overline{S}_n, 2P_4, 2bull, (\overline{S_{n-1} \cup K_1}) \cup (S_{n-1} \cup K_1)\}$.*

*Prova*. Seja $H$ um grafo bloco. Se $H \in \{K_n \cup \overline{K}_n, S_n \cup \overline{S}_n, 2P_4, 2bull, (\overline{S_{n-1} \cup K_1}) \cup (S_{n-1} \cup K_1)\}$, então é simples obter uma decomposição complementar de $H$ em cada caso.

A seguir, suponha que $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Então $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Além disso, pela Proposição 3.3, $H$ tem uma componente conexa, digamos $G$, de ordem $n$.

Como $H$ é um grafo bloco, então $G$ e $\overline{G}$ são grafos bloco. Por definição, $G$ e $\overline{G}$ são livres de $\{diamond, C_{\ell+4}\}$, para todo $\ell \geq 0$. Como $G$ (resp. $\overline{G}$) é livre de $\{C_4, C_5\}$, então $\overline{G}$ (resp. $G$) é livre de $2K_2$. Logo $G$ e $\overline{G}$ são grafos *split*. Seja $C \cup I$ uma partição de $V(G)$ onde $C$ é uma clique e $I$ é um conjunto independente. Se $|I| = 0$ (resp. $|C| = 0$), então $H = K_n \cup \overline{K}_n$.

Agora, considere que $|I|, |C| \geq 1$.

**Afirmação 3.31** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo bloco split conexo. Então, para todo $v \in I$, $d_G(v) \in \{1, |C|\}$.*

*Prova. (da Afirmação 3.31).* Como $G$ é conexo, temos que $d_G(v) > 0$. Suponha por contradição que existe $v \in I$, tal que $d_G(v) \notin \{1, |C|\}$. Então, temos que $1 < d_G(v) < |C|$. Como $d_G(v) < |C|$, existe $u \in C$ tal que $uv \notin E(H)$. Como $d_G(v) > 1$, existem $x, y \in C$ tais que $x, y \in N_G(v)$. Como $xy \in C$, então $xy \in E(G)$. Isso implica que $H[\{u, v, x, y\}]$ é isomorfo a um *diamond*, uma contradição. □

Se $|C| = 1$, então, para todo $v \in I$, $d_G(v) = 1$. Isso implica que $H = S_n \cup \overline{S}_n$.

Agora, considere que $C$ é maximal, e seja $|C| = 2$. Este caso segue na Afirmação 3.32.

**Afirmação 3.32** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo bloco split conexo. Se $C$ é maximal e $|C| = 2$, então $G \in \{P_4, S_n\}$.*

*Prova. (da Afirmação 3.32).* Suponha, por contradição, que $G \notin \{P_4, S_n\}$. Seja $C = \{x, y\}$ uma clique maximal de $G$. Recordamos que $I \neq \emptyset$. Como $G$ é conexo, e $C$ é maximal, temos que todo vértice em $I$ tem grau exatamente um. Considere que $I = \{v\}$. Então, ou $vx \in E(G)$ ou $vy \in E(G)$.

Se $vx \in E(G)$ (resp. $vy \in E(G)$) então $G$ é uma estrela, contradição. Então, existe $v' \in I \setminus \{v\}$ tal que ou $v'x \in E(G)$ ou $v'y \in E(G)$. Se $N_G(v') \cap N_G(v) \neq \emptyset$, então $G$ é uma estrela, contradição. Caso contrário, $H[\{v, v', x, y\}]$ é isomorfo a um $P_4$, contradição.

Agora, suponha que existe $w \in I \setminus \{v, v'\}$. Como $|C| = 2$, então dois vértices de $\{v, v', w\}$ tem a mesma vizinhança em $C$. Se $N_G(v) \cap N_G(v') \cap N_G(w) \neq \emptyset$, então $G$ é uma estrela, contradição. Caso contrário, sem perda de generalidade, considere que $vx, v'x \in E(G)$ e $wy \in E(G)$. Assim, temos que $H[\{v, v', w, y\}] \simeq K_2 \cup 2K_1$ em $G$, logo $\{v, v', w, y\}$ induz um *diamond* em $\overline{G}$, uma contradição. Portanto, se $|C| = 2$, então $G \in \{P_4, S_n\}$. □

Finalmente, o Caso $|C| \geq 3$ segue na Afirmação 3.33.

**Afirmação 3.33** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo bloco split conexo. Se $C$ é maximal e $|C| \geq 3$, então $G \in \{bull, \overline{S_{n-1} \cup K_1}\}$.*

*Prova. (da Afirmação 3.33).* Suponha, por contradição, que $G \notin \{bull, \overline{S_{n-1} \cup K_1}\}$. Como $|C| \geq 3$, existem $x, y, z \in C$. Como $G \neq bull$, então ou (a) $|C| > 3$, ou (b) $|C| = 3$ e neste caso se $I = \{v, v'\}$ então $N_G(v) \cap N_G(v') \neq \emptyset$.

Em ambos os casos, se $|I| = 1$, então $G$ é $\overline{S_{n-1} \cup K_1}$, contradição. Então, considere $|I| \geq 2$.

No Caso (a), temos $|C| > 3$. Lembre que $I \neq \emptyset$. Como $G$ é conexo, e $G \neq \overline{S_{n-1} \cup K_1}$, então $|I| \geq 2$. Além disso, temos que existem $v, v' \in I$. Como $|C| > 3$, existe uma aresta $xy \in E(H[C])$ tal que $x, y \notin N_G(\{v, v'\})$. Logo, $H[\{v, v', x, y\}] \simeq K_2 \cup 2K_1$, e $\overline{G}$ contém um *diamond*, contradição.

No Caso (b), se $I = \{v, v'\}$, então $N_G(v) \cap N_G(v') \neq \emptyset$. Suponha, sem perda de generalidade, que $z \in N_G(v) \cap N_G(v')$. Como $xy \in E(G)$, temos que $\{v, v', x, y\}$ induz um $K_2 \cup 2K_1$ em $G$, assim $\overline{G}$ possui um *diamond*, uma contradição. Agora, considere $|I| \geq 3$, e seja $v, v', v'' \in I$. Suponha que $N_G(\{v, v'\}) \cap N_G(v'') = \emptyset$. Isso implica que $\{v, v'\} \cup N_G[v'']$ contém um subgrafo induzido $K_2 \cup 2K_1$, contradição. Considere $N_G(v) \cap N_G(v') \cap N_G(v'') = \{z\}$. Assim temos que $\{v, v', x, y\}$ induz um $K_2 \cup 2K_1$, contradição.

Portanto, $G \in \{bull, \overline{S_{n-1} \cup K_1}\}$. □

Pela Afirmação 3.32 temos que $H \in \{2P_4, S_n \cup \overline{S}_n\}$. Pela Afirmação 3.33 temos que $H = 2bull$ ou $H = (\overline{S_{n-1} \cup K_1}) \cup (S_{n-1} \cup K_1)$, o que completa a prova. □

### 3.1.5 Grafos *Split*

Enquanto ISOMORFISMO é GI-completo considerando grafos *split* [10], fechamos a Seção 3.1 mostrando na Proposição 3.34 uma caracterização de grafos *split* $H$ aos quais $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$.

**Proposição 3.34** *Seja $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ um grafo split. Então $H = K_n \cup \overline{K}_n$.*

*Prova.* Seja $H = (C \cup I, E)$ um grafo *split* de ordem $2n$. Se $H = K_n \cup \overline{K}_n$, então claramente, uma decomposição de $H$ pode ser definida por $G = K_n$ e $\overline{G} = \overline{K}_n$. Logo, $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Resta mostrar que se $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$, então $H = K_n \cup \overline{K}_n$.

Suponha que $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Pela Proposição 3.3, existe uma componente conexa $H_1$ de $H$ com exatamente $n$ vértices. Seja $G = H_1$ e $\overline{G} = H[V(H) \setminus V(H_1)]$. Suponha, por contradição, que $G$ não é uma clique. Então, existem $u, v \in V(G)$ tais que $uv \notin E(G)$. Como $\overline{G}$ é o complemento de $G$, temos que existe uma aresta em $\overline{G}$. Isso implica que $2K_2$ é um subgrafo de $H$, uma contradição, como $H$ é *split*. Logo, $G$ é uma clique com $n$ vértices e $\overline{G}$ é um conjunto independente com $n$ vértices. Portanto $H = K_n \cup \overline{K}_n$. □

## 3.2 Quando $M$ induz um grafo bipartido completo

Nesta seção consideramos $\Pi_{K_{n,n}}$ como a propriedade em que $M$ induz um grafo bipartido completo, isto é, $M$ contém todas as arestas possíveis entre $G$ e $\overline{G}$. Muitos dos resultados obtidos para COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ podem ser aplicados para COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}})$. Tal equivalência é apresentada no Lema 3.35.

**Lema 3.35** *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de grafos. Então* COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ *em $\mathcal{C}$ é polinomialmente equivalente a* COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}})$ *na classe complementar de $\mathcal{C}$.*

*Prova.* Seja $H \in \mathcal{C}$. Temos que $\overline{H} \in$ co-$\mathcal{C}$.

Suponha que $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Então $H$ pode ser decomposto em dois grafos, $G$ e seu complemento $\overline{G}$, para algum grafo $G$, tal que o

conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio. Isso implica que $H$ é a união disjunta $G \cup \overline{G}$ e então $\overline{H} = \overline{G \cup \overline{G}}$. Logo, $\overline{H}$ é dado pelo join $\overline{G} + G$.

Suponha que $\overline{H}$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}})$. Então $\overline{H}$ pode ser decomposto em dois subgrafos complementares $A$ e $B$, para algum grafo $A$, de tal forma que o conjunto de corte $M$ da decomposição induz um grafo bipartido completo. Pela definição de complemento, como, para todo $u \in A$ e para todo $v \in B$, $uv \in E(\overline{H})$; temos que $uv \notin E(H)$. Logo, $H$ é a união disjunta de $\overline{A}$ e $\overline{B}$. Como $\overline{A} = B$ e $\overline{B} = A$, segue que $H$ pode ser decomposto em dois subgrafos complementares $B$ e $A$ com nenhuma aresta entre $B$ e $A$. Portanto, o conjunto de corte $M$ da decomposição é vazio, e $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_{\emptyset})$.

A prova de COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}}) \propto$ COMP-SUB$(\Pi_{\emptyset})$ segue de forma análoga. □

A partir dos Lemas 3.6 e 3.35, e das Proposições 3.22–3.34 concluímos que o problema COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}})$ pode ser resolvido em tempo polinomial para as seguintes classes:

- grafos de permutação;
- cografos;
- grafos de comparabilidade;
- grafos de co-comparabilidade;
- grafos de intervalo;
- grafos de co-intervalo;
- grafos *split*;
- grafos co-bloco;
- grafos co-*starlike*;
- grafos co-intervalo unitário.

## 3.3 Quando $M$ é um emparelhamento perfeito

Sejam $H = (V, E)$ um grafo e $(A, B)$ uma partição de $V(H) = A \cup B$ com $|A| = |B|$. Denotamos por $\Pi_{\text{PERF}}$ a propriedade de arestas que denota um emparelhamento perfeito entre vértices de $A$ e $B$. No caso das propriedades de arestas $\Pi_{\emptyset}$ e $\Pi_{K_{n,n}}$ abordadas nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente, o particionamento das instâncias-*sim* de COMP-SUB eram imediatos. Mais especificamente por exemplo, se $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_{\emptyset})$ então $H$ possui uma componente $H'$ conexa com $n$ vértices, o que define a partição a ser considerada $(H', V(H) \setminus V(H'))$, restando tratar o isomorfismo entre $H'$ e $\overline{V(H) \setminus V(H')}$.

Vale mencionar que existem grafos $H$ instâncias *sim* de COMP-SUB$(\Pi_{\text{PERF}})$ que admitem mais de um emparelhamento perfeito de corte, e desta forma podem admitir mais

de uma partição possível. Por exemplo, no grafo $H_1$ da Figura 3.7, $M = \{u_iv_i : 1 \leq i \leq 5\}$ e $M' = \{v_2v_1, u_2u_1, u_3v_3, u_4u_5, v_4v_5\}$ são dois emparelhamentos perfeitos de corte possíveis. Note que a partição $(A,B)$ definida por $M$ tem $H_1[A] \simeq H_1[B] \simeq \textit{bull}$ enquanto que a partição $(A',B')$ definida por $M'$ tem $H_1[A'] \simeq H_1[B'] \simeq \textit{bull}$. Já no grafo $H_2$ da Figura 3.7, temos também dois emparelhamentos perfeitos definidos por $M = \{u_iv_i : 1 \leq i \leq 5\}$ e $M' = \{v_2v_1, u_2u_1, u_3v_3, u_4u_5, v_4v_5\}$, porém a partição $(A,B)$ definida por $M$ implica $H_2[A] \simeq \textit{house}$ e $H_2[B] \simeq P_5$, logo $H_2[A] \simeq \overline{H_2[B]}$; enquanto que a partição $(A',B')$ definida por $M'$ atesta $H_2[A'] \simeq \textit{bull}$ e $H_2[B'] \simeq C_5$, em que $H_2[A'] \not\simeq \overline{H_2[B']}$.

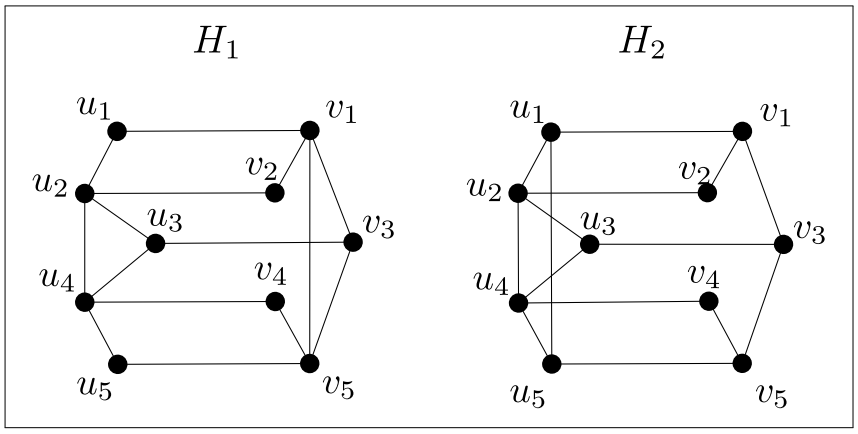



**Figura 3.7:** *Emparelhamentos perfeitos de corte podem não ser únicos.*

Os exemplos acima descritos nos dão indícios de que, mesmo sabendo particionar o grafo de entrada $H$, a fim de resolver COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), ainda pode ser necessário determinar ISOMORFISMO entre uma partição e o complemento da outra. Em vista disso, nos atemos em algumas classes restritas de grafos ou que ISOMORFISMO ou que o particionamento pudesse ser determinado em tempo polinomial.

Mostramos a seguir alguns resultados de caracterizações de grafos $H$ que pertencem à COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), quando o grafo de entrada $H$ é um cografo, um grafo cordal ou um grafo distância hereditária. Estes resultados seguem nas Proposições 3.36, 3.38 e 3.39, respectivamente.

**Proposição 3.36** *Seja $H$ um cografo de ordem $2n$. Então, $H \in$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) se e somente se $H = K_2$.*

*Prova.* Seja $H$ um cografo. Trivialmente, se $H$ é um $K_2$, então $H \in$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$).

Suponha que $H \in$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), e por contradição que $H \neq K_2$. Pela definição do problema, existe uma decomposição complementar $(H_1,H_2)$ de $H$, na qual o conjunto de corte $M$ da decomposição é um emparelhamento perfeito entre vértices de $V(H_1)$ e $V(H_2)$. Seja $M = \{u_1v_1, \ldots, u_nv_n\}$ onde $u_i \in V(H_1)$ e $v_i \in V(H_2)$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $u_i u_j \in E(H_1)$. Sabemos que $u_i v_j \notin E(H)$ sempre que $i \neq j$. Como $H$ é livre de $P_4$, obtemos que $u_i u_j \in E(H_1)$ se e somente se $v_i v_j \in E(H_2)$, para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. Isso implica que $H_1 \simeq H_2$, então $H_1 \simeq \overline{H}_1$, i.e., $H_1$ é autocomplementar.

Como um cografo é conexo se e somente se seu complemento é deconexo [44], concluímos que $H_1$ não pode ser autocomplementar, uma contradição. □

A partir da Proposição 3.36 obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 3.37** *O único cografo prisma complementar é* $K_1\overline{K}_1$.

**Proposição 3.38** *Seja $H$ um grafo cordal de ordem $2n$. Então, $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_{\text{PERF}})$ se e somente se $H = K_n\overline{K}_n$.*

*Prova*. Seja $H$ um grafo cordal. Claramente, se $H = K_n\overline{K}_n$, então $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_{\text{PERF}})$.

Considere que $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_{\text{PERF}})$. Então, existe uma decomposição $H_1, H_2$ de $H$, na qual $H_2 = \overline{H}_1$ e o conjunto de corte $M$ da decomposição é um emparelhamento perfeito entre vértices em $V(H_1)$ e $V(H_2)$. Seja $M = \{u_1v_1, \ldots, u_nv_n\}$ onde $u_i \in V(H_1)$ e $v_i \in V(H_2)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Suponha, por contradição, que $H \neq K_n\overline{K}_n$.

Podemos assumir que existem $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $u_i u_j \in E(H_1)$ e $v_k v_l \in E(H_2)$. Como $M$ é um emparelhamento perfeito e $H$ é cordal, temos que $v_i v_j \notin E(H_2)$ e $u_k u_l \notin E(H_1)$. Então, obtemos que $u_p v_q \in E(H_1)$ se e somente se $v_p v_q \notin E(H_2)$, para todo $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ distinto. Além disso, $H$ ser cordal implica que não existe caminho entre $v_i, v_j$ em $H_2$, nem entre $u_k, u_l$ em $H_1$. Consequentemente ambos $H_1$ e seu complemento $H_2$ são desconexos, uma contradição. □

Nosso próximo resultado caracteriza grafos distância-hereditária instâncias-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_{\text{PERF}})$, apresentado na Proposição 3.39. Para tal resultado, seja $H_3$ o grafo da Figura 3.8. Lembramos que um grafo *distância-hereditária* é um grafo livre de $\{domino, house, gem, C_{k+5}\}$, para todo $k \geq 0$.

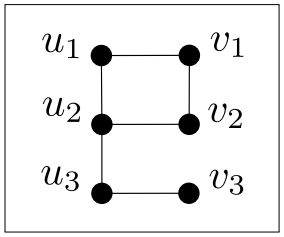



**Figura 3.8:** *Grafo $H_3$.*

**Proposição 3.39** *Seja $H$ um grafo distância-hereditária de ordem $2n$. Então, $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_{\text{PERF}})$ se e somente se $H \in \{K_n\overline{K}_n, H_3\}$.*

*Prova*. Seja $H$ um grafo distância-hereditária. Claramente, se $H = K_n\overline{K}_n$, então $H \in$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$). Seja $H_3$ com $V(H_3) = \{u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3\}$ rotulado como na Figura 3.8, $V_1 = \{u_1,u_2,u_3\}$, e $V_2 = \{v_1,v_2,v_3\}$. Claramente $H[V_1] \simeq \overline{H[V_2]}$, então $V_1$ e $V_2$ definem uma partição complementar de $V(H)$. Logo, $H_3 \in$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$).

Agora, suponha que $H \in$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$). Por definição, existe uma decomposição $H_1,H_2$ de $H$, na qual $H_2 \simeq \overline{H}_1$ e o conjunto de corte $M$ da decomposição é um emparelhamento perfeito entre vértices de $V(H_1)$ e $V(H_2)$. Seja $M = \{u_1v_1,\ldots,u_nv_n\}$ onde $u_i \in V(H_1)$ e $v_i \in V(H_2)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Começamos mostrando que $H_2$ é um grafo livre de $\{P_3,K_3\}$.

**Afirmação 1.** *Se $H_1$ é conexo, então $H_2$ é um grafo livre de $\{P_3,K_3\}$.*

*Prova da Afirmação 1.* Suponha, por contradição, que $H_2$ contém (I) um $P_3$ induzido ou (II) um $K_3$ induzido.

(I) Sejam $i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$ distintos, tais que $v_iv_j,v_jv_k \in E(H_2)$ e $v_iv_k \notin E(H_2)$. Como $H_1$ é conexo, existe um $(u_p,u_q)$-caminho em $H_1$, para todo $p,q \in \{i,j,k\}$. Como $H$ não contém um ciclo induzido com 5 ou mais vértices, segue que $dist_{H_1}(u_i,u_j) \leq 1$. Como $H_1$ é conexo, $u_i$ e $u_j$ pertencem à mesma componente conexa de $H_1$, então $u_iu_j \in E(H_1)$. Com um argumento similar, obtemos que $u_ju_k \in E(H_1)$. Novamente, como $H$ é livre de $C_5$, $u_iu_k \notin E(H_1)$. Porém, o conjunto $\{u_i,u_j,u_k,v_i,v_j,v_k\}$ induz um *domino* em $H$, uma contradição.

(II) Sejam $i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$ distintos, tais que $\{v_i,v_j,v_k\}$ induz um $K_3$ em $H_2$. Neste caso, temos que cada um dos vértices $u_i,u_j$ e $u_k$ devem pertencer a componentes conexas distintas de $H_1$, caso contrário $\{u_i,u_j,u_k,v_i,v_j,v_k\}$ induz um *house* em $H$. Assim, temos uma contradição já que $H_1$ é conexo. □

Pela Afirmação 1, $H_2$ é livre de $\{P_3,K_3\}$, isto é, $H_2 \simeq pK_1 \cup qK_2$, onde $p+q=n$. Para o restante da prova, os casos considerados dizem respeito à $p$ e $q$.

**Afirmação 2.** Se $q \geq 2$ e $p \geq 0$, então para toda aresta $e \in E(H_1)$, $e$ pertence a um $K_3$ ou a um $C_4$ em $H_1$.

*Prova da Afirmação 2.* Seja $H_2 = A \cup B$, onde $A = pK_1$ e $B = qK_2$. Como $H \in$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), $H_1$ é o complemento de $H_2$. Então $H_1 = \overline{A} + \overline{B}$, onde $\overline{A} = K_p$ e $\overline{B}$ é um grafo completo $q$-partido.

Como $V(\overline{A})$ é uma clique, é imediato que para toda aresta $e \in E(\overline{A})$, $e$ pertence a um $K_3$.

Se $q = 2$, então $\overline{B} \simeq C_4$ e toda aresta $e \in E(\overline{B})$ pertence a um $C_4$. Caso contrário, para todo $x \in V(\overline{B})$, existem dois vértices adjacentes $u,v \in N_{\overline{B}}(x)$. Então, para toda aresta $e \in E(\overline{B})$, $e$ pertence a um $K_3$.

Seja $xy \in E(H_1)$ tal que $x \in \overline{A}$ e $y \in \overline{B}$. Como $x$ é adjacente a todo vértice em $\overline{B}$, existem dois vértices adjacentes $u, v \in N_{\overline{B}}(x)$. Então $xy$ pertence a um $K_3$. Logo, concluímos que para toda aresta $e \in E(H_1)$, $e$ pertence a um $K_3$ ou a um $C_4$. □

Agora, seja $v_i v_j \in E(H_2)$ (como $q > 0$ tal aresta existe). Dado que $H_1$ é conexo e $H$ é livre de ciclos com 5 ou mais vértices, temos que $u_i u_j \in E(H_1)$. Pela Afirmação 2, temos que $u_i u_j$ pertence a um $K_3$ ou a um $C_4$ em $H_1$. No primeiro caso, $H$ contém um *house* induzido, uma contradição. No segundo, $H$ contém um *domino* induzido, também uma contradição.

Agora, sejam $q = 1$ e $p \geq 1$ (se $p = 0$ então $H_1$ seria desconexo).

Se $p \geq 2$, por argumentação similar à Afirmação 2, obtemos que para toda aresta $e \in E(H_1)$, $e$ pertence a um $K_3$. Então, considere $p = 1$.

Neste caso, $H_1 \simeq P_3$. Novamente, seja $v_i v_j \in E(H_2)$ (como $q > 0$ tal aresta existe). Como $H$ é livre de ciclos com 5 ou mais vértices, temos que $u_i u_j \in E(H_1)$. Então $H$ deve ser isomorfo ao grafo $H_3$.

Finalmente, sejam $q = 0$ e $p \geq 0$. Neste caso, $V(H_2)$ é um conjunto independente com $n$ vértices, então $H_1 \simeq K_n$. Portanto $H = K_n \overline{K}_n$, o que completa a prova. □

No Teorema 3.41, mostramos que o problema COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) é GI-difícil. Este resultado recorre ao Lema 3.40.

**Lema 3.40** *Sejam $H$ um grafo, $uv \in E(H)$ e $M$ um emparelhamento de corte de $H$. Se $uv$ está contida em um $K_3$, então $uv \notin M$.*

*Prova.* Suponha que $uv$ está contida em um $K_3$ e, por contradição, que $uv \in M$. Seja $w \in N_H(u) \cap N_H(v)$ e $M = [A, B]$. Como $M$ é um emparelhamento de corte de $H$ e $uv \in M$, podemos supor que $u \in A$ e $v \in B$. Note que ou $w \in A$ ou $w \in B$. Se $w \in A$, temos que $v$ tem dois vizinhos em $A$, uma contradição. Similarmente, se $w \in B$, $u$ tem dois vizinhos em $B$, contradição. □

**Teorema 3.41** COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) *é* GI*-difícil.*

*Prova.* Seja $(A, B)$ uma instância de ISOMORFISMO, com $|V(A)| = n$ e $|V(B)| = n$. Sejam $A_0 = \{v \in V(A) : deg_A(v) = 0\}$ e $B_0 = \{V \in V(B) : deg_B(v) = 0\}$. Como $H[A_0]$ e $H[B_0]$ não possuem arestas, qualquer mapeamento $\varphi : A_0 \to B_0$ é um isomorfismo, já que $uv \in E(H[A_0]) \leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H[B_0])$, para quaisquer $u, v \in A_0$, é satisfeita por vacuidade. Desta forma, podemos assumir que $A$ e $B$ não possuem vértices isolados.

Mostramos que ISOMORFISMO $\propto$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$). A partir da instância $(A, B)$ de ISOMORFISMO, construímos uma instância $H$ de COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) como segue (observe a Figura 3.9 para um exemplo). Sejam $G_1$ o grafo *diamond* obtido por

um grafo completo com 4 vértices $\{u_1,\ldots,u_4\}$ e a remoção da aresta $u_3u_4$, e $G_2$ o grafo $P_2 \cup 2P_1$ com 4 vértices $\{v_1,\ldots,v_4\}$ e aresta $v_1v_2$. Primeiro, obtenha $H$ pela união disjunta de $A$, $\overline{B}$, $G_1$ e $G_2$. Denote arbitrariamente $V(A) = \{a_1,\ldots,a_n\}$ e $V(\overline{B}) = \{b_1,\ldots,b_n\}$. Em seguida, adicione a $H$ as seguintes arestas:

- $u_iv_i$, para todo $1 \leq i \leq 4$;
- $a_ib_i$, para todo $1 \leq i \leq n$;
- $a_iu_1, a_iu_2$, para todo $1 \leq i \leq n$;
- $b_iv_1, b_iv_2$, para todo $1 \leq i \leq n$;

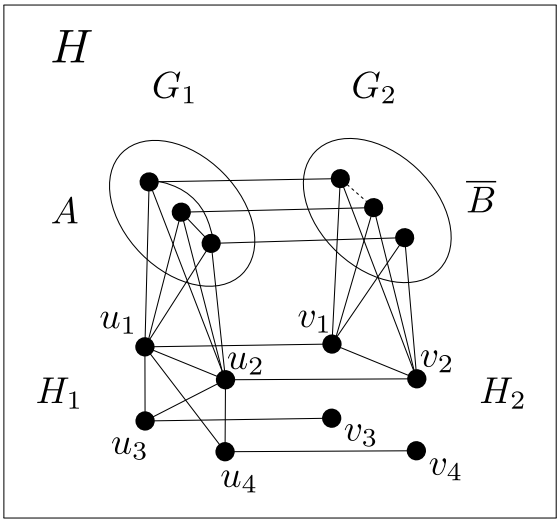



**Figura 3.9:** *Construção utilizada para a prova do Teorema 3.41.*

Observe que esta construção pode ser realizada em tempo polinomial. Antes da parte principal da prova, mostramos a Afirmação 3.42, que diz respeito à unicidade da existência de um emparelhamento de corte em $H$ obtido pela contrução descrita.

**Afirmação 3.42** *Se $H$ é o grafo obtido pela construção acima, então $M = \{a_ib_i, u_jv_j : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 4\}$ é o único emparelhamento perfeito de corte de $H$.*

*Prova. (da Afirmação 3.42).* Seja $M$ um emparelhamento perfeito de corte de $H$. Pelo Lema 3.40, qualquer aresta contida em um $K_3$ não deve ser aresta de um emparelhamento perfeito de corte de $H$. Assim, mostramos que toda aresta de $H_1$ está contida em um $K_3$. Para $H_2$ o argumento é similar.

Primeiro, observe que $\{u_1,u_2,u_3\}$ e $\{u_1,u_2,u_4\}$ induzem $K_3$ em $H_1$. Logo toda aresta de $G_1$ está contida em um $K_3$. Agora, sejam $a \in A$ e $x \in \{u_1,u_2\}$. Como $w \in N_{H_1}(a) \cap N_{H_1}(x)$, para $w \in \{u_1,u_2\} \setminus \{x\}$, $ax$ está contida no grafo $K_3$ induzido por $\{a,x,w\}$. Por fim, sejam $a,a' \in A$. Como $u_1 \in N_{H_1}(a) \cap N_{H_1}(a')$, obtemos que $aa'$ está em um $K_3$ induzido por $\{a,a',u_1\}$ em $H_1$. A partir disso, concluímos que toda aresta de $H_1$ está contida em um $K_3$, e assim, pelo Lema 3.40, $M \cap E(H_1) = \emptyset$. De maneira

análoga, obtemos que $M \cap E(H_1) = \emptyset$. Portanto, como $M$ é um emparelhamento perfeito de corte de $H$, $|M| = n+4$ e as únicas arestas de $H$ que não estão contidas em $K_3$ são $E(H) \setminus (E(H_1) \cup E(H_2))$, obtemos que $M = \{a_i b_i, u_j v_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\}$ é o único emparelhamento perfeito de corte de $H$. □

Neste momento, provamos que $(A,B)$ é uma instância-*sim* de ISOMORFISMO se e somente se $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$).

Suponha que $A \simeq B$ e seja $\varphi : V(A) \to V(B)$ uma função de isomorfismo de $A$ para $B$. Observe que $A \simeq \overline{\overline{B}}$ e $G_1 \simeq \overline{G}_2$. Pela construção, $\overline{H}_2$ é dado por $\overline{\overline{B}} = B$ e $\overline{G}_2 = G_1$ juntamente com, para todo $b \in \overline{B}$, $v_1 b, v_2 b \notin E(\overline{H}_2)$, e $v_3 b, v_4 b \in E(\overline{H}_2)$. Logo, a função $\varphi' : V(G_2) \to V(G_1)$ definida por

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto u_3, \\ v_2 &\mapsto u_4, \\ v_3 &\mapsto u_1, \\ v_4 &\mapsto u_2 \end{aligned}$$

juntamente com o mapeamento $\varphi$ definem um isomorfismo entre $H_1$ e $\overline{H}_2$. Portanto, $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$).

Agora, suponha que $H$ é uma instância-*sim* de COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$). Pela Afirmação 3.42, $M = \{a_i b_i, u_j v_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\}$ é o único emparelhamento perfeito de corte de $H$. Como $H_1 \simeq \overline{H}_2$, resta mostrar que $A \simeq \overline{\overline{B}}$. Seja $\varphi : V(H_1) \to V(\overline{H}_2)$ uma função de isomorfismo entre $H_1$ e $\overline{H}_2$.

Note que, como $A$ e $\overline{\overline{B}} = B$ não possuem vértices isolados, pela construção, $deg_{H_1}(a) \geq 3$, para todo $a \in A$, e $deg_{\overline{H}_2}(b) \geq 3$, para todo $b \in \overline{B}$. A respeito de $V(G_1)$, temos $deg_{H_1}(a) \leq deg_A(a) + 2 = n+1$, para todo $a \in A$, $deg_{H_1}(u_1) = deg_{H_1}(u_2) = n+3$ e $deg_{H_1}(u_3) = deg_{H_1}(u_4) = 2$. No caso de $V(\overline{G}_2)$ temos $deg_{\overline{H}_2}(b) \leq deg_B(b) + 2 = n+1$, para todo $b \in \overline{B}$, $deg_{\overline{H}_2}(v_1) = deg_{\overline{H}_2}(v_2) = 2$ e $deg_{\overline{H}_2}(v_3) = deg_{\overline{H}_2}(v_4) = n+3$.

Tendo em vista as definições dos graus acima e, por hipótese, a função $\varphi$ define um isomorfismo entre $A$ e $B$, temos que $\varphi$ deve mapear $V(G_1) \to V(G_2)$ e o mapeamento $\varphi' \subseteq \varphi$ tal que $\varphi' : A \to \overline{B}$ define um isomorfismo entre $A$ e $B$. □

Para finalizar este capítulo, consideramos uma variação do problema COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), na qual explicitamos a classe de grafo a que deve pertencer um dos grafos da decomposição complementar.

PARTIÇÃO EM SUBGRAFOS COMPLEMENTARES RESTRITOS (RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi$))

**Instância:** Um grafo $H = (V,E)$, uma propriedade de arestas $\Pi$, e uma classe de grafos $\mathcal{C}$.

**Pergunta:** O grafo $H$ pode ser decomposto em dois grafos $H_1$ e $H_2$, em que $H_1 \in \mathcal{C}$, $H_2 = \overline{H}_1$, e o conjunto de corte $M$ da decomposição satisfaz $\Pi$?

**Teorema 3.43** *Sejam $H$ um grafo de ordem $2n$ e $\mathcal{C}$ a classe dos cografos. Decidir se $H \in$ RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) tal que $H_1 \in \mathcal{C}$ pode ser resolvido em tempo polinomial.*

*Prova*. Para esta prova considere o Algoritmo 3.1. Lembramos que ISOMORFISMO pode ser resolvido em tempo linear para cografos. Assim, dado que selecionamos $n$ vértices para $H_1$, podemos checar em tempo linear se $H_1 \simeq \overline{H[V(H) \setminus V(H_1)]}$. Então, mostramos como encontrar em tempo polinomial todas as partições candidatas $V_1 \cup V_2$ de $V(H)$, tais que $H[V_1] = H_1$ é um cografo e $u \in V_1$ tem exatamente um vértice adjacente em $V_2$. Para então checarmos se $H_1 \simeq \overline{H[V(H) \setminus V(H_1)]}$ e obtermos a solução para RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$).

Primeiro, faremos algumas observações. Podemos assumir que $H_1$ é conexo. Se $H \in$ COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), e $H_1$ é um cografo, temos que $dist_{H_1}(u,v) \leq 2$, para todo $u,v \in V(H_1)$. Como $H_1$ é conexo, então $H_2$ é desconexo [44]. Assim, existem $x,y \in V(H_2)$ tais que $x$ e $y$ estão em componentes conexas distintas de $H_2$. Isso implica que $dist_H(x,y) \leq dist_{H_1}(u,v) + 2$, então $diam(H) \leq 4$. Se o grafo de entrada $H$ é livre de $P_4$, isto é, $H$ é um cografo, temos pela Proposição 3.36 que $H \in$ RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) se e somente se $H = K_2$. Assim, assumimos que $H$ tem um $P_4$ induzido.

O Algoritmo 3.1 procede incluindo nos conjuntos de vértices $V_1$ e $V_2$ os vértices que garantidamente estão em uma solução viável, dadas as definições de cografos e do emparelhamento $M$ procurado. Dizemos que $v \in V(H)$ é um vértice *não identificado*, se $v$ ainda não foi incluído na solução viável, isto é, se $v \in V(H) \setminus (V_1 \cup V_2)$. Para evitar repetição de código, definimos um conjunto de instruções chamado CHEQUE-PARTIÇÃO-CONCLUÍDA, que adiciona o restante dos vértices não identificados ao conjunto $V_2$ e retorna $V_1, V_2$, caso todas as três condições a seguir sejam satisfeitas:

(i) $H[V_1]$ e $H[V_2]$ são cografos; e
(ii) o conjunto de arestas de corte $[V_1, V_2]$ é um emparelhamento perfeito; e
(iii) $H[V_1]$ é isomorfo a $\overline{H[V_2]}$.

Agora, procedemos com o Algoritmo 3.1.

**Algoritmo 3.1:** PARTICIONANDO-$H$-EM-COGRAFOS

**Entrada:** Um grafo $H$ com $diam(H) \leq 4$.

**Saída:** Partição $V_1, V_2$ de $V(H)$ tal que $H[V_1]$ e $H[V_2]$ são cografos complementares, ou NÃO caso $V(H)$ não seja particionável.

**para cada** $P_4$ *induzido:* $v_1u_1u_2v_2$ *de* $H$ **faça**
  Seja $N_i = \{v \in V(H) \setminus (V_1 \cup V_2) : dist_{H \setminus \{v_1,v_2\}}(v, \{u_1,u_2\}) = i\}$
  $V_1 := N_1 \cup \{u_1,u_2\}$
  $V_2 := N_3 \cup \{v_1,v_2\}$
  **enquanto** *existe* $x \in V(H) \setminus (V_1 \cup V_2)$ *tal que* $|N_{V_1}(x)| \geq 2$ **faça**
    adicione $x$ a $V_1$
  CHEQUE-PARTIÇÃO-CONCLUÍDA
  Denote $V_1 \setminus \{u_1,u_2\}$ por $\{y_1,\ldots,y_k\}$
  Sejam $G_1,\ldots,G_\ell$ as componentes de $G = H[N_2 \setminus (V_1 \cup V_2)]$
  Denote $N_G(y_i)$ por $L_i$, para todo $i \in [k]$
  **para cada** $i \in [k]$, *tal que* $|L_i| = 1$ **faça**
    Seja $j \in [\ell]$ tal que $L_i \cap V(G_j) \neq \emptyset$
    adicione $V(G_j)$ a $V_2$
  **enquanto** *existem* $i \in [k]$ *e* $j \in [\ell]$, *tais que* $|L_i \cap V(G_j)| \geq 2$ **faça**
    adicione $V(G_j)$ a $V_1$
  **para cada** $j \in [\ell]$, *tal que* $G_j$ *tem dois vértices não adjacentes* **faça**
    adicione $V(G_j)$ a $V_2$
  CHEQUE-PARTIÇÃO-CONCLUÍDA
  Seja $G'$ o subgrafo de $G$ com vértices ainda não identificados
  Sejam $I_{G'} = \{i \in [k] : L_i \cap V(G') \neq \emptyset\}$ e $J_{G'} = \{j \in [\ell] : G_j \cap V(G') \neq \emptyset\}$
  **se** *existe* $i \in I_{G'}$ *tal que* $|L_i \cap V(G')| \geq 3$ **então**
    **se** $|I_{G'}| \geq 2$ **então**
      **retorna** NÃO
    **senão**
      **para cada** $z \in L_i \cap V(G')$ **faça**
        adicione $z$ a $V_2$
        adicione $V(G') \setminus \{z\}$ a $V_1$
        CHEQUE-PARTIÇÃO-CONCLUÍDA
  **senão**
    **se** $|J_{G'}| \geq 3$ **então**
      Seja $j \in J_{G'}$ tal que, para todo $i \in I_{G'}$, $L_i \cap V(G_j) \neq \emptyset$
      adicione $V(G_j)$ a $V_1$
      adicione $V(G') \setminus V(G_j)$ a $V_2$
      CHEQUE-PARTIÇÃO-CONCLUÍDA
    **senão**
      **para cada** $j \in J_{G'}$ **faça**
        adicione $V(G_j)$ a $V_1$
        adicione $V(G') \setminus V(G_j)$ a $V_2$
        CHEQUE-PARTIÇÃO-CONCLUÍDA
**retorna** NÃO

Para a prova de corretude do Algoritmo 3.1 procedemos com algumas afirmações. Na Afirmação 1 mostramos que se $H \in$ RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), então é possível escolher vértices de um $P_4$ induzido em $H$ para inicializar os conjuntos $V_1$ e $V_2$.

**Afirmação 1.** *Seja $H$ um grafo contendo um $P_4$ induzido $v_1u_1u_2v_2$. Se $H \in$ RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), então existe uma partição complementar $(H_1, H_2)$ de $H$ tal que $u_1, u_2 \in V(H_1)$ e $v_1, v_2 \in V(H_2)$.*

*Prova da Afirmação 1.* Por contradição, suponha que $u_iu_j \in E(H_1)$, implica que $v_iv_j \in E(H_2)$, para $i, j \in [n]$ distintos. Desta forma, temos que $H_1 \simeq H_2$. Como $H_1$ é conexo se e somente se $H_2$ é desconexo, obtemos que $H_2$ não é o complemento de $H_1$, uma contradição. □

Seja $M$ o conjunto de arestas de corte sendo construído pelo Algoritmo 3.1. A partir da Afirmação 1, inicializamos $V_1$ com $u_1, u_2$ e $V_2$ com $v_1, v_2$. Além disso, como as arestas $u_1v_1, u_2, v_2 \in M$, temos que todo vértice em $N_H(\{u_1, u_2\}) \setminus \{v_1, v_2\} = N_1$ deve pertencer a $V_1$. Desta forma, a completa inicialização de $V_1$ é dada por $V_1 = N_1 \cup \{u_1, u_2\}$. Em relação à inicialização de $V_2$, como $H[V_1]$ deve ser um cografo, para qualquer vértice $v \in V_1$, $dist_(v, \{u_1, u_2\}) \leq 2$, temos que $N_3 \subseteq V_2$. Logo $V_2 = N_3 \cup \{v_1, v_2\}$.

Dada a inicialização de $V_1$ e $V_2$ prosseguimos com algumas configurações que permitem com exatidão determinar vértices ainda não identificados que devem pertencer a $V_1$ e a $V_2$.

**Afirmação 2.** *Seja $x \in V(H) \setminus (V_1 \cup V_2)$. Se $|N_{V_1}(x)| \geq 2$, então $x \in V_1$.*

*Prova da Afirmação 2.* Se um vértice $x$ ainda não identificado tem pelo menos dois vizinhos em $V_1$, pela definição de emparelhamento perfeito de corte, $x$ deve pertencer a $V_1$ (em caso contrário $x$ teria dois ou mais vizinhos na partição oposta, uma contradição). □

Denotamos $V_1 \setminus \{u_1, u_2\}$ por $\{y_1, \ldots, y_k\}$. Sejam $G_1, \ldots, G_\ell$ as componentes conexas do grafo $G = H[N_2 \setminus (V_1 \cup V_2)]$ e considere $N_G(y_i)$ como $L_i$, para todo $i \in [k]$. Chamamos $L_i$ de *linha $i$* de $G$. Veja na Figura 3.10 uma representação do grafo $G$.

Após a execução das Linhas 5–6, temos que para todo vértice $x \in V(H) \setminus (V_1 \cup V_2)$, $x$ tem no máximo 1 vizinho em $V_1$. Assim, temos que, para todo $x \in V(G)$, existe um único $i \in [k]$ tal que $xy_i \in E(H)$. Em outras palavras, os conjuntos de vértices $L_1, \ldots, L_k$ são disjuntos dois a dois. Na próxima afirmação, mostramos que dada uma componente $G_j$ de $G$, seus vértices não podem estar em partições opostas, isto é, ou todos os vértices de $G_j$ pertencem a $V_1$ ou todos os vértices de $G_j$ pertencem a $V_2$.

**Afirmação 3.** *Seja $G_j$ uma componente conexa de $G$, para algum $j \in [\ell]$. Então, ou $V(G_j) \subseteq V_1$ ou $V(G_j) \subseteq V_2$.*

*Prova da Afirmação 3.* Suponha, por contradição, que existam dois vértices $w, w' \in V(G_j)$ tais que $w \in V_1$ e $w' \in V_2$. Como a componente $G_j$ é conexa, podemos supor ainda que

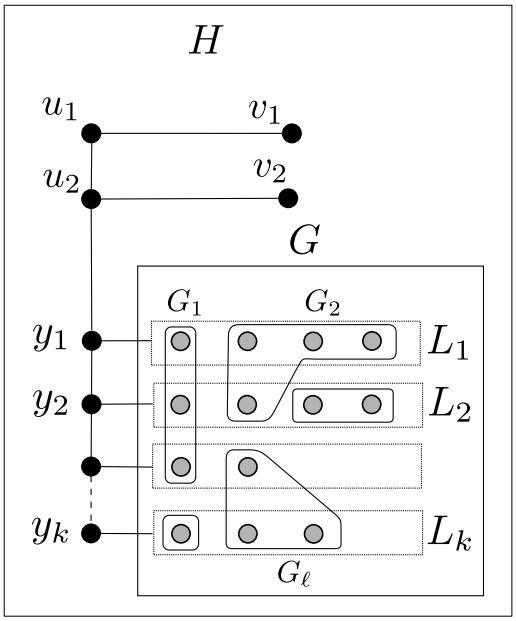



**Figura 3.10:** *Representação do grafo G de vértices não identificados (em cinza).*

$ww' \in E(H)$. Pela definição de $G$, todo vértice $x$ de $G$ tem um vizinho $y$ em $V_1$. Desta forma, como $w, y \in V_1$, o vértice $w'$ tem dois vizinhos na partição oposta, o que contradiz $M$. □

Queremos encontrar um emparelhamento perfeito de corte $M$ entre $V_1$ e $V_2$. Desta forma, todo vértice $u \in V_1$ deve ter exatamente um vizinho $v \in V_2$. Assim, para algum $i \in [k]$, se $y_i \in V_1$ ainda não possui vizinho em $V_2$ e $y_i$ é vizinho de apenas um vértice $x \in V(G)$, então $x$ deve pertencer a $V_2$. A Afirmação 4 expressa esta ideia.

**Afirmação 4.** *Se* $|L_i| = 1$*, então* $V(G_j) \subseteq V_2$.

*Prova da Afirmação 4.* Suponha, por contradição, que $|L_i| = 1$ e $V(G_j) \not\subseteq V_2$. Isso implica que $y_i$ não tem um vizinho em $V_2$, logo $M$ não é um emparelhamento perfeito, uma contradição. □

A Afirmação 5 diz respeito ao caso em que uma dada componente $G_j$ de $G$ possui dois ou mais vértices vizinhos de $y_i$, para algum $i \in [k]$.

**Afirmação 5.** *Sejam* $i \in [k]$ *e* $j \in [\ell]$*. Se* $|L_i \cap V(G_j)| \geq 2$*, então* $V(G_j) \subseteq V_1$.

*Prova da Afirmação 5.* Suponha que $|L_i \cap V(G_j)| \geq 2$. Como $y_i$ tem dois vizinhos em $G_j$, pela definição de $M$ os vértices de $G_j$ devem pertencer a $V_1$. □

Após a execução das Linhas 14–15, temos que as componentes $G_j$ de $G$ com vértices ainda não identificados possuem no máximo 1 vértice em cada $L_i$, $i \in [k]$. Agora, a Afirmação 6 diz respeito à propriedade livre de $P_4$ dos cografos, que garante que mais vértices possam ser atribuídos à partição $V_2$.

**Afirmação 6.** *Seja $j \in [\ell]$. Após a execução das Linhas 14–15, se $G_j$ tem dois vértices não adjacentes (em linhas diferentes), então $V(G_j) \subseteq V_2$.*

*Prova da Afirmação 6.* Suponha que existem $w, w' \in V(G_j)$, para algum $j \in [\ell]$, tais que $ww' \notin E(G_j)$. Pela Afirmação 3 temos que, dada uma componente $G_j$ de $G$, ou todos os vértices de $G_j$ pertencem a $V_1$ ou todos os vértices de $G_j$ pertencem a $V_2$, então, por contradição, suponha que $V(G_j) \subseteq V_1$.

Sejam $i, i' \in [k]$ tais que $wy_i, w'y_{i'} \in E(H)$. Como $H[V_1]$ deve ser conexo e $diam(H[V_1]) \leq 2$, temos que ou $y_iy_{i'} \in E(H)$ ou $y_ix, xy_{i'} \in E(H)$, para algum $x \in V_1$. No primeiro caso, $\{y_i, y_{i'}, w, w'\}$ induz um $P_4$ em $H[V_1]$, e no segundo, $\{x, y_i, y_{i'}, w\}$ induz um $P_4$ em $H[V_1]$, contradições. □

Após a execução da Linha 18, denotamos por $G'$ o subgrafo de $G$ formado pelos vértices ainda não identificados. Sejam $I_{G'} = \{i \in [k] : L_i \cap V(G') \neq \emptyset\}$ e $J_{G'} = \{j \in [\ell] : G_j \cap V(G') \neq \emptyset\}$, os dois conjuntos de inteiros que armazenam os índices dos vértices ainda não identificados, em relação às linhas, e às componentes de $G$, respectivamente.

**Afirmação 7.** *Após a execução da Linha 18, se $H \in$ RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), então $|L_i| \leq 2$, para todo $i \in I_{G'}$ ou $|I_{G'}| = 1$.*

*Prova da Afirmação 7.* Por contradição, suponha que existe $i \in I_{G'}$ com $|L_i| \geq 3$ e $|I_{G'}| \geq 2$. Sejam $i, i' \in I_{G'}$ distintos e $z_1, z_2, z_3 \in L_i$. Pela Afirmação 4, sabemos que cada linha ainda não identificada tem ao menos dois vértices, então sejam $z'_1, z'_2 \in L_{i'}$.

Dado que $H$ é instância-*sim* de RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), $y_i$ deve ter um e no máximo um vizinho em $V_2$. Logo, algum $z \in L_i$ deve pertencer a $V_2$. Isso implica que dois ou mais vértices de $L_i$ devem pertencer a $V_1$. Sem perda de generalidade, considere que $z_1, z'_1 \in V_2$, $z_2, z_3, z'_2 \in V_1$.

Sabemos que, após a execução das Linhas 14–15, as componentes $G_j$ de $G$ com vértices ainda não identificados possuem no máximo 1 vértice em cada $L_i$, $i \in [k]$. Isso implica que $z_2$ e $z_3$ não são ambos vizinhos de $z'_2$. Consequentemente, $H[V_1]$ contém um $P_4$ induzido, uma contradição. □

Pela Afirmação 7, se existe $i \in I_{G'}$ com $|L_i| \geq 3$ e $|I_{G'}| \geq 2$, então $H$ é instância-*não* de RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), como retornado pela Linha 23. Então, buscamos todas as possibilidades de vizinhos para $y_i$ que podem ser colocados em $V_2$, o que é realizado pelas Linhas 25–28. Caso contrário, isto é, $|L_i| = 2$, para todo $i \in I_{G'}$, prosseguimos com a Afirmação 8, que é a base da escolha da Linha 31.

**Afirmação 8.** *Se $H \in$ RESTRICTED-COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), então o grafo $G'$ contém uma componente conexa que intersecta todas as linhas.*

*Prova da Afirmação 8.* Queremos mostrar que existe $j \in J_{G'}$ tal que $L_i \cap G_j \neq \emptyset$, para todo $i \in I_{G'}$. Por contradição, suponha que, para todo $j \in J_{G'}$, existe $i \in I_{G'}$ tal que $L_i \cap G_j = \emptyset$.

Se $y_i$ já tem vizinho em $V_2$, então $L_i \subseteq V_1$ de imediato. Assim, consideramos que $y_i$ ainda não tem vizinho em $V_2$.

Lembramos que, para todo $i \in I_{G'}$, $y_i$ tem dois ou mais vizinhos em $G'$ (se $y_i$ tem apenas um vizinho $x \in G'$, $x$ deve pertencer a $V_2$). Também temos que para todo $i \in I_{G'}$, $|L_i| = 2$. (Se existe $i$ com $|L_i| \geq 3$, o Algoritmo 3.1 trata na condição da Linha 21).

Por hipótese, para todo $j \in J_{G'}$, existe $i \in I_{G'}$ tal que $L_i \cap G_j = \emptyset$. Assim se $G_j \subseteq V_1$, então $L_i \cap V_1 = \emptyset$, pois do contrário, $H[V_1]$ conteria um $P_4$ induzido. Mas, como $y_i$ ainda não tem vizinho em $V_2$, $L_i \cap V_1 = \emptyset$ contradiz $M$. Como dois vértices da mesma linha não devem pertencer simultaneamente a $V_2$, alguma componente $G_j$ deve intersectar $V_1$ para algum $j \in J_{G'}$, logo obtemos a contradição desejada. □

Agora, o último caso possível é que $G'_1$ e $G'_2$ sejam ambas $|I_{G'}|$-cliques. Neste caso também buscamos todas as possibilidades para checar o isomorfismo em todas as partições possíveis, realizado pelas Linhas 36–39.

Como, em caso de dúvida, o Algoritmo 3.1 considera todas as escolhas possíveis, completamos a correção do algoritmo proposto. Agora procedemos com a análise de seu tempo de execução.

O laço mais externo do algoritmo é executado para cada $P_4$ induzido de $H$, o que requer tempo $O(n^4)$. O passo da Linha 5 requer tempo $O(n)$. CHEQUE-PARTIÇÃO-CONCLUÍDA requer tempo $O(n)$, já que o reconhecimento de cografos pode ser feito em $O(n)$, a checagem se o corte $[V_1, V_2]$ é um emparelhamento perfeito pode ser feito em $O(n)$ e o teste de isomorfismo em cografos pode ser realizado em $O(n)$. O passo da Linha 11 requer tempo $O(n)$, enquanto que o passo da Linha 14 requer tempo $O(n^2)$, e a Linha 16 exige tempo $O(n)$. O laço da Linha 25 é executado $O(|L_i \cap V(G')|) = O(n)$ vezes para cada $z$, o que requer um tempo de $O(n^2)$. A Linha 34 é executada uma única vez, logo o tempo requerido é $O(n)$. A Linha 39 que requer $O(n)$ é executada $O(|J_{G'}|)$ vezes. Como neste ponto $|J_{G'}| = 2$, há uma complexidade de tempo de $O(1) \cdot O(n) = O(n)$.

Em suma, temos uma complexidade de tempo polinomial, da ordem de $O(n^4) \cdot O(n^2) = O(n^6)$. □

Veja um sumário dos nossos resultados obtidos para o problema COMP-SUB($\Pi$) quando $M$ é qualquer, vazio, um grafo completo e um emparelhamento perfeito, respectivamente nas Tabelas 3.2– 3.5.

**Tabela 3.2:** *Resumo dos resultados para* COMP-SUB($\Pi$).

| **Classe de Grafo** | $\Pi$ **qualquer** |
|---|---|
| Livre de $k$-clique | Polinomial (Proposição 3.2) |
| Livre de $k$-conjunto independente | Polinomial (Proposição 3.2) |
| Bipartido | Polinomial (Proposição 3.2) |
| Planar | Polinomial (Proposição 3.2) |
| Cúbico | Polinomial (Proposição 3.2) |

**Tabela 3.3:** *Resumo dos resultados para* COMP-SUB($\Pi_\emptyset$).

| **Classe de Grafo** | $\Pi$: $\mathbf{M} = \emptyset$ |
|---|---|
| Geral | GI-completo (Teorema 3.4) |
| Cordal | GI-completo (Corolário 3.9) |
| Permutação | Linear (Corolário 3.6) |
| Cografo | Linear (Corolário 3.6) |
| Comparabilidade | Linear (Corolário 3.8) |
| Co-comparabilidade | Linear (Corolário 3.8) |
| Intervalo | Linear (Corolário 3.8) |
| Co-intervalo | Linear (Corolário 3.8) |
| *Split* | $H = K_n \cup \overline{K}_n$ (Proposição 3.34) |
| Bloco | $H \in \{K_n \cup \overline{K}_n,\ S_n \cup \overline{S}_n,\ 2P_4,\ 2bull, (\overline{S_{n-1} \cup K_1}) \cup (S_{n-1} \cup K_1)\}$ (Proposição 3.30) |
| *Starlike* | $H = (K_p + \overline{K}_q) \cup (\overline{K}_p \cup K_q)$, for $p+q=n$ (Proposição 3.28) |
| Intervalo Unitário | $H \in \{(\overline{P}_\ell + K_{n-\ell}) \cup (P_\ell \cup \overline{K}_{n-\ell}),\ 2bull\}$, para $1 \leq \ell \leq 4$ (Proposição 3.22) |
| Fortemente Cordal | Polinomial, se $nt(G') = 2$ (Teorema 3.11) ou se $nt(H_1') = nt(\overline{H}_1') = 1$ e $H_1$ contém *rising-sun* ou *co-rising-sun* (Teorema 3.14). Caso contrário, redutível a ISOMORFISMO em grafos *split* 2-threshold (Corolário 3.21) |

**Tabela 3.4:** *Resumo dos resultados para* COMP-SUB($\Pi_{K_{n,n}}$).

| **Classe de Grafo** | $\Pi$: $\mathbf{H[M]} = \mathbf{K_{n,n}}$ |
|---|---|
| Permutação | Polinomial (Lema 3.35) |
| Cografo | Polinomial (Lema 3.35) |
| Comparabilidade | Polinomial (Lema 3.35) |
| Co-comparabilidade | Polinomial (Lema 3.35) |
| Intervalo | Polinomial (Lema 3.35) |
| Co-intervalo | Polinomial (Lema 3.35) |
| *Split* | Polinomial (Lema 3.35) |
| Co-bloco | Polinomial (Lema 3.35) |
| Co-*starlike* | Polinomial (Lema 3.35) |
| Co-intervalo unitário | Polinomial (Lema 3.35) |

**Tabela 3.5:** *Resumo dos resultados para* COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$).

| **Classe de Grafo** | $\Pi$: **M é um emparelhamento perfeito** |
|---|---|
| $H$ qualquer | GI-difícil (Teorema 3.41) |
| Cografo | $H = K_2$ (Proposição 3.36) |
| $H$ qualquer, quando $G$ e $\overline{G}$ são cografos | Polinomial (Teorema 3.43) |
| Cordal | $H = K_n\overline{K}_n$ (Proposição 3.38) |
| Distância Hereditária | $H \in \{K_n\overline{K}_n, H_3\}$ (Proposição 3.39) |

CAPÍTULO 4

# Fundamentos Sobre Convexidades

Como já mencionado na Introdução, estudamos nos prismas complementares alguns parâmetros de convexidade. Dedicamos, então, este capítulo, para conceituar convexidades abstratas e convexidades em grafos. Iniciamos definindo convexidade em geral, na Seção 4.1. Em seguida, na Seção 4.2, definimos convexidade em grafos e também exemplificamos algumas delas. Em geral, nossos fundamentos são baseados em Duchet [62], Farber e Jamison [66], Harary e Nieminem [79] e Van de Vel [99].

## 4.1 Convexidades Abstratas

A convexidade em grafos importa conceitos originalmente provenientes da geometria Euclidiana. Antes de entrarmos propriamente nos conceitos de convexidade em grafos, merece aqui uma retomada dos conceitos de convexidade em geral, para uma familiarização com o assunto.

**Definição 4.1** *Uma família $\mathscr{C}$ de subconjuntos de um conjunto $X$ é chamada de convexidade sobre $X$ se*

- *O conjunto vazio $\emptyset$ e o conjunto $X$ pertencem à $\mathscr{C}$.*
- *$\mathscr{C}$ é fechada sobre interseções.*
- *$\mathscr{C}$ é fechada sobre uniões aninhadas.*

O par $(X,\mathscr{C})$ é chamado *espaço de convexidade* ou *estrutura convexa* e os subconjuntos de $\mathscr{C}$ são chamados *conjuntos convexos*. O menor conjunto convexo contendo um conjunto $A \subseteq X$ é chamado de *fecho convexo* de $A$.

Para convexidades finitas, a terceira condição é desnecessária, uma vez que é trivialmente satisfeita, já que a união de toda cadeia finita ordenada por inclusão é igual ao seu último elemento [97].

Seja $X = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathscr{C} = \{\emptyset,\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4,5\}\}$ e $\mathscr{C}' = \{\emptyset,\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3,4,5\}\}$. A família de subconjuntos $\mathscr{C}$ é uma convexidade sobre

$X$, já que satisfaz as três condições da Definição 4.1, enquanto que $\mathscr{C}'$ não é uma convexidade sobre $X$, já que $\mathscr{C}'$ não é fechada sobre interseções: $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\} \notin \mathscr{C}'$.

Uma convexidade clássica é definida a seguir. Seja $(X,d)$ um espaço métrico. Um ponto $x \in X$ está *geodeticamente entre* dois pontos $a,b \in X$ se $d(a,x)+d(x,b) = d(a,b)$. Um conjunto $C \subseteq X$ é *geodeticamente convexo* desde que cada ponto entre dois pontos de $C$ esteja em $C$. Esta convexidade sobre $X$ é conhecida como *convexidade geodética* de $(X,d)$.

Considere um conjunto $V$ qualquer e um inteiro $k$. Denote por $\binom{V}{k}$ o conjunto de todos os subconjuntos contendo $k$ elementos de $V$, e por $2^V$ o conjunto de todos os subconjuntos de $V$. Uma outra convexidade interessante é definida a seguir. Um espaço de convexidade finito $(V,\mathscr{C})$ é uma *convexidade de intervalo* se existir uma função de intervalo $I : \binom{V}{k} \to 2^V$ tal que um subconjunto $C$ de $V$ pertence a $\mathscr{C}$ se e somente se $I(\{x,y\}) \subseteq C$ para todo par distinto de elementos de $C$.

## 4.2 Convexidades em Grafos

Trazendo para o contexto da Teoria dos Grafos, como trabalhamos apenas com grafos finitos, de maneira similar podemos estabelecer uma relação entre os conceitos anteriores.

**Definição 4.2** *Dado um grafo $G = (V(G),E(G))$, uma família $\mathscr{C}$ de subconjuntos de $V(G)$ é uma convexidade sobre $V(G)$ se*

- $\emptyset, V(G) \in \mathscr{C}$ *e*
- $\mathscr{C}$ *é fechada sobre interseções.*

Os elementos de $\mathscr{C}$ são chamados *conjuntos $\mathscr{C}$-convexos*. O *fecho convexo* de algum conjunto $S$ com relação à alguma convexidade $\mathscr{C}$, denotado por $H_{\mathscr{C}}(S)$, é o menor conjunto convexo contendo $S$.

As convexidades em grafos mais intuitivas são definidas através de um conjunto $\mathscr{P}$ de caminhos em grafos. Neste caso, um conjunto $C \subseteq V(G)$ é convexo precisamente quando $C$ contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de $\mathscr{P}$ cujos vértices extremos estão também em $C$.

Quando $\mathscr{P}$ é o conjunto de todos os caminhos mínimos em $G$, então $\mathscr{C}$ é a *convexidade geodética* [14, 37, 51, 52, 56, 65, 67, 79]. No espaço Euclidiano, um conjunto é convexo se todo segmento de reta entre dois pontos do conjunto está contido no conjunto. A convexidade geodética em grafos é uma das convexidades mais estudadas, já que caminhos mínimos em um grafo possuem analogia com segmentos de reta entre dois pontos no espaço Euclidiano. Considerando $\mathscr{C}$ a convexidade geodética, na Figura

4.1(a) temos $S = \{a,h\}$ representado pelos vértices circulados e os vértices de cor preta representam o fecho convexo de $S$, dado por $H_{\mathscr{C}}(S) = \{a,c,d,f,g,h\}$.

Se considerarmos $\mathcal{P}$ como a coleção de todos os caminhos induzidos de $G$, isto é, caminhos que não possuem arestas entre dois vértices não consecutivos, então $\mathscr{C}$ é a *convexidade monofônica* [54, 62, 66]. Um exemplo de conjunto convexo considerando $\mathscr{C}$ a convexidade monofônica pode ser visto na Figura 4.1(b), em que $S = \{f,g\}$ e $H_{\mathscr{C}}(S) = \{c,d,f,g,h\}$.

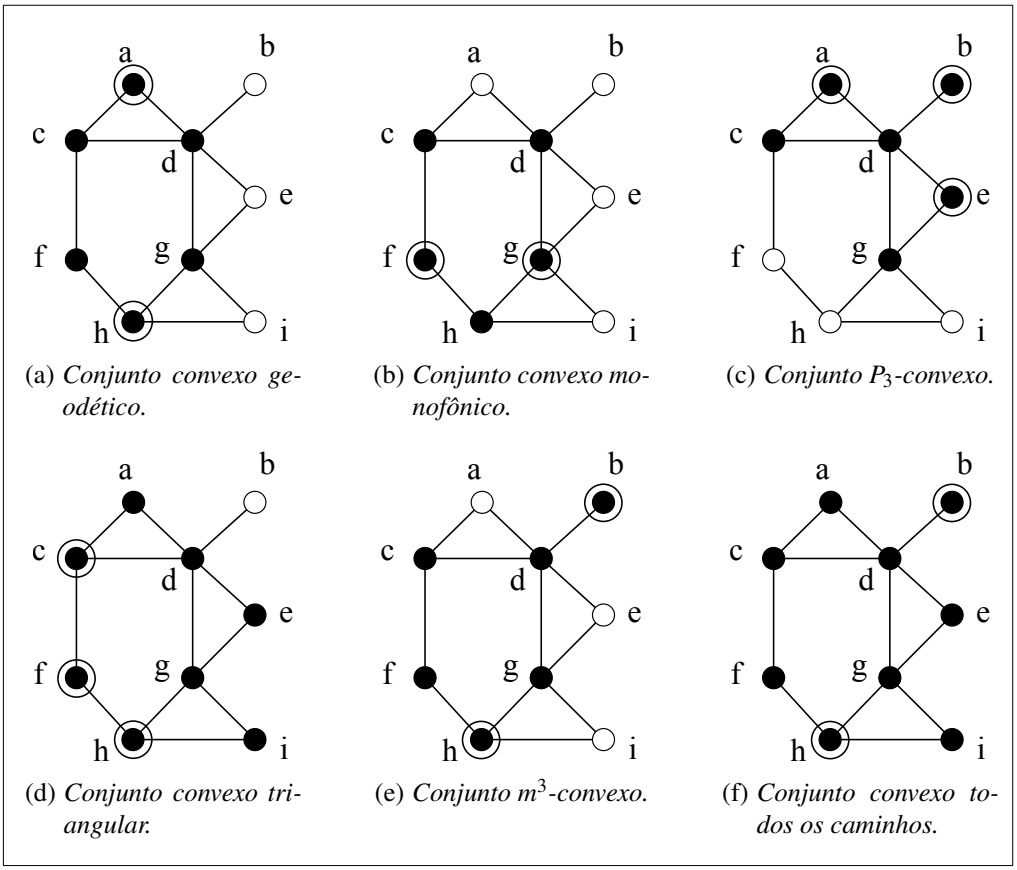
Quando $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os caminhos de comprimento dois entre dois vértices, $\mathscr{C}$ é a *convexidade* $P_3$. A convexidade $P_3$ foi estudada primeiramente em grafos direcionados, especialmente em *torneios*, que são grafos completos direcionados, veja em [64, 92, 100]. Muitos estudos relacionados a convexidade $P_3$ foram conduzidos também para grafos não direcionados [4, 7, 26, 27, 28, 24, 55] e mais recentemente em [40, 41, 61, 95]. Na Figura 4.1(c), seja $S = \{a,b,e\}$. Considerando $\mathscr{C}$ a convexidade $P_3$, temos $H_{\mathscr{C}}(S) = \{a,b,c,d,e,g\}$.

Uma *corda* em um caminho $P$ é uma aresta que não faz parte do caminho entre dois vértices não consecutivos. Cordas em um caminho dando origem a *triângulos*, que são ciclos de tamanho três, formados por duas arestas do caminho, são chamadas *cordas curtas* de um caminho. Um *caminho de triângulos* é um caminho cujas cordas, se existirem, são todas curtas. A *convexidade de caminhos de triângulos* é definida considerando $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os caminhos de triângulos de um grafo [32]. Considere a Figura 4.1(d) e seja $S = \{c,f,h\}$, representado pelos vértices circulados. Os vértices de cor preta correspondem ao fecho convexo de $S$, $H_{\mathscr{C}}(S) = \{a,c,d,e,f,g,h,i\}$, em que $\mathscr{C}$ é a convexidade de caminhos de triângulos.

Algumas convexidades menos estudadas, também definidas em termos de caminhos em grafos, são a *$m^3$-convexidade*, definida quando $\mathcal{P}$ é a coleção de todos os caminhos induzidos de tamanho maior ou igual a três [58], e a *convexidade de todos os caminhos*, definida ao considerarmos $\mathcal{P}$ a coleção de todos os caminhos em um grafo [31]. Seja $S = \{b,h\}$, na Figura 4.1(e) temos o fecho convexo $H_{\mathscr{C}}(S) = \{b,c,d,f,g,h\}$ quando $\mathscr{C}$ é a $m^3$-convexidade e na Figura 4.1(f) temos o fecho convexo $H_{\mathscr{C}}(S) = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ quando $\mathscr{C}$ é a convexidade de todos os caminhos. Também podemos citar a *convexidade* $P_3^*$, definida quando $\mathcal{P}$ é o conjunto de caminhos induzidos de tamanho dois [4] e a *convexidade de caminhos mais longos*, definida quando $\mathcal{P}$ é o conjunto de caminhos mais longos de um grafo $G$ [33].

Além das convexidades em termos de caminhos apresentadas anteriormente, podemos citar algumas que não são definidas através de um conjunto de caminhos em grafos, como por exemplo a convexidade de Steiner e a convexidade de $l$-vizinhança que serão definidas a seguir.

Seja $G$ um grafo conexo sem pesos e seja $W \subseteq V(G)$. Um subgrafo conexo $T$ de




(a) *Conjunto convexo geodético.*

(b) *Conjunto convexo monofônico.*

(c) *Conjunto $P_3$-convexo.*

(d) *Conjunto convexo triangular.*

(e) *Conjunto $m^3$-convexo.*

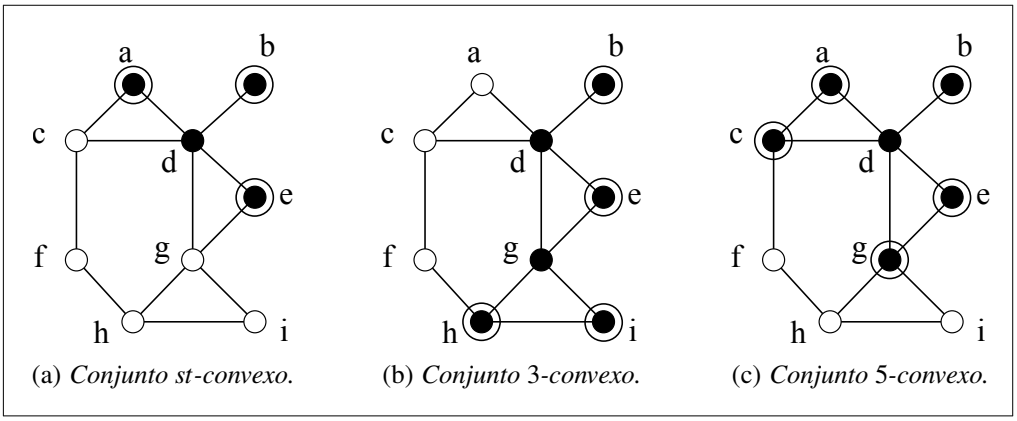
(f) *Conjunto convexo todos os caminhos.*

**Figura 4.1:** *Exemplos de conjuntos convexos em diferentes convexidades de caminhos. Fonte: [90].*

$G$ com número mínimo de arestas tal que $W \subseteq V(T)$ é chamado *árvore de Steiner* de $G$. Um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é *st-convexo* se, para todo $A \subseteq S$, todos os vértices em toda árvore de Steiner de $A$ pertencem a $S$. A família $\mathscr{C}$ de todos os conjuntos *st*-convexos de $V(G)$ definem a *convexidade de Steiner*, estudada por exemplo em [2, 15, 36, 49, 81]. Na Figura 4.2(a) considere $S = \{a,b,e\}$, representado pelos vértices circulados. O fecho convexo do conjunto $S$, em que $\mathscr{C}$ é a convexidade de Steiner, é dado por $H_{\mathscr{C}}(S) = \{a,b,d,e\}$.

Seja $G$ um grafo finito, simples e não direcionado. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *l-convexo* se todo vértice em $V(G) \setminus S$ tem menos que $l$ vizinhos em $S$. A família $\mathscr{C}$ de todos os conjuntos $l$-convexos de $V(G)$ definem a *convexidade de l-vizinhança* [25]. Esta convexidade tem sido estudada também considerando outras nomenclaturas, como por exemplo, processos de conversão irreversível [27, 59, 69, 70]. A convexidade $P_3$ é um caso particular da convexidade de $l$-vizinhança, considerando $l = 2$. As Figuras 4.2(b) e 4.2(c) mostram os fechos convexos dos conjuntos $S = \{b,e,h,i\}$ e $S' = \{a,b,c,e,g\}$, na convexidade de $l$-vizinhança, com $l = 3$ e $l = 5$, respectivamente.

Assim como na geometria Euclidiana, em que o intervalo entre dois pontos contém todos os pontos intermediários presentes no segmento ligando estes dois pontos,




(a) *Conjunto st-convexo.* (b) *Conjunto* 3*-convexo.* (c) *Conjunto* 5*-convexo.*

**Figura 4.2:** *Exemplos de conjuntos convexos em convexidades que não são de caminhos. Fonte: [90].*

para uma convexidade de caminhos em grafos também podemos definir uma função de intervalo para seus vértices.

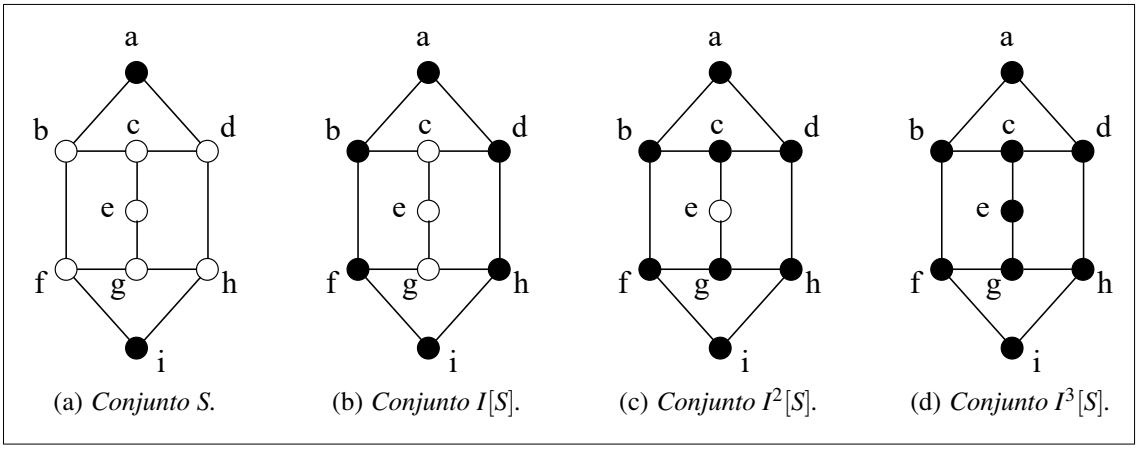
Seja $G$ um grafo e $\mathscr{C}$ uma convexidade definida sobre um conjunto de caminhos $\mathcal{P}$ em $G$. O *intervalo fechado* entre dois vértices $u,v \in V(G)$, denotado por $I_{\mathscr{C}}[u,v]$, consiste de $u,v$ juntamente com todos os vértices pertencentes a todo caminho entre $u$ e $v$ em $\mathcal{P}$. Se não existe um caminho entre $u$ e $v$ em $\mathcal{P}$, então $I_{\mathscr{C}}[u,v] = \{u,v\}$. Assim, o intervalo fechado de $S \subseteq V(G)$, denotado por $I_{\mathscr{C}}[S]$, é a união de todos os intervalos $I_{\mathscr{C}}[u,v]$ para todo vértice $u,v \in S$. O conjunto $S$ é um conjunto convexo na convexidade $\mathscr{C}$, se $I_{\mathscr{C}}[S] = S$. A cardinalidade $con(G)$ do maior conjunto convexo próprio de $G$ é o *número de convexidade* de $G$.

Vamos definir agora o fecho convexo de $S$ em função das iterações da operação de intervalo fechado. Para isso, seja $I^0_{\mathscr{C}}[S] = S$ e considere $I^{k+1}_{\mathscr{C}}[S] = I_{\mathscr{C}}[I^k_{\mathscr{C}}[S]]$ para $k \geq 0$. A partir de algum termo $p$ a sequência será constante, então quando $I^p_{\mathscr{C}}[S] = I^{p+1}_{\mathscr{C}}[S]$ obtemos o *fecho convexo* de $S$, que é o conjunto $I^p_{\mathscr{C}}[S]$, mas denotado por $H_{\mathscr{C}}(S)$. O conjunto $S$ é chamado *conjunto envoltório* de $G$, se $H_{\mathscr{C}}(S) = V(G)$. A cardinalidade $h_{\mathscr{C}}(G)$ do menor conjunto envoltório de $G$ é o *número envoltório* de $G$. Se permitirmos exatamente uma iteração da operação de intervalo fechado, isso leva a definição de um outro parâmetro. Se $I_{\mathscr{C}}[S] = V(G)$, dizemos que $S$ é um *conjunto de intervalo* de $G$. Na convexidade geodética frequentemente aparece na literatura a terminologia *conjunto geodético* para designar um conjunto de intervalo de $G$, então optamos aqui pela segunda nomenclatura. Assim, definimos a cardinalidade $g(G)$ do menor conjunto geodético de $G$ como o *número geodético* de $G$.

Para os subconjuntos de vértices $S$ e $X$ de um grafo $G$, dizemos que o conjunto $X$ é *contaminado* pelos vértices do conjunto $S$, se $X \subseteq H_{\mathscr{C}}(S)$. De forma análoga, para um vértice $v \in V(G)$, dizemos que $v$ é *contaminado* pelos vértices do conjunto $S \subseteq V(G)$, se $v \in H_{\mathscr{C}}(S)$. Em geral, quando não houver ambiguidade, omitiremos o subscrito "$\mathscr{C}$" da notação, por exemplo $I[S]$ e $H(S)$. Quando for necessário distinguir o grafo $G$ sendo

considerado, substituímos o subscrito "$\mathscr{C}$" por "$G$", por exemplo $I_G[S]$ e $H_G(S)$.

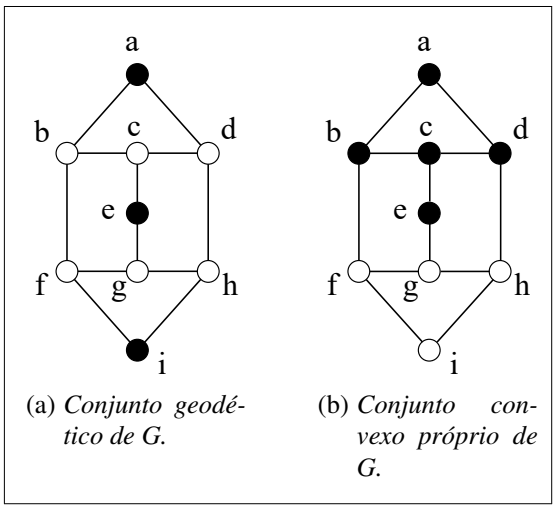
Considerando $\mathscr{C}$ a convexidade geodética, temos na Figura 4.3 um grafo $G$ em que ilustramos a execução passo a passo da operação de intervalo fechado do conjunto de vértices $S = \{a,i\}$. Na primeira iteração, adicionamos os vértices $b,d,f,h$, uma vez que, entre $a$ e $i$, temos os caminhos mínimos $abfi$ e $adhi$, logo $I[S] = \{a,b,d,f,h,i\}$, Figura 4.3(b). Na segunda iteração, temos os caminhos mínimos $bcd$ e $fgh$, então contaminamos os vértices $c,g$, logo $I^2[S] = \{a,b,c,d,f,g,h,i\}$, Figura 4.3(c). Na terceira iteração, a partir do caminho mínimo $ceg$, contaminamos o vértice $e$, logo $I^3[S] = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$, Figura 4.3(d). Como $I^3[S]$ contém todos os vértices do grafo $G$, temos que $H(S) = V(G)$, então $S$ é um conjunto envoltório do grafo $G$. Como o fecho convexo de um único vértice é igual ao conjunto com apenas este vértice, temos que $h(G)$ não é menor que dois, portanto $h(G) = 2$.




(a) *Conjunto S.* (b) *Conjunto $I[S]$.* (c) *Conjunto $I^2[S]$.* (d) *Conjunto $I^3[S]$.*

**Figura 4.3:** *Exemplo de execução da operação de intervalo na convexidade geodética. Fonte: [90].*

Note que no grafo $G$ da Figura 4.4 não existe conjunto geodético de ordem 2. Em particular, $S = \{a,e,i\}$ é um conjunto geodético de $G$ e, assim, $g(G) = 3$. No mesmo grafo $G$ da Figura 4.4 temos que um conjunto convexo próprio de cardinalidade máxima tem ordem 5, por exemplo $S = \{a,b,c,d,e\}$. Portanto $con(G) = 5$.




(a) *Conjunto geodético de G.*

(b) *Conjunto convexo próprio de G.*

**Figura 4.4:** *Exemplo de conjunto geodético e conjunto convexo próprio em G.*

CAPÍTULO 5

# Convexidade Geodética em COMP-SUB($\Pi$)

Muitos dos resultados encontrados na literatura sobre convexidade em grafos podem ser aplicados para a família de grafos que podem ser particionados em dois subgrafos complementares. Este capítulo tem então por objetivo estabelecer conexões entre a convexidade geodética e a classe de grafos composta pelos grafos $H$ instâncias-*sim* para o problema COMP-SUB.

Seja $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Relembrando a notação dos prismas complementares $G\overline{G}$, que podem ser escritos como o produto complementar $G\square K_2(S)$ com $|S| = 1$, note que $H$ pode ser obtido como o produto complementar $G\square\overline{K}_2(S)$, também com $|S| = 1$. Alguns resultados de número envoltório, número geodético e número de convexidade para $H$ seguem na Proposição 5.1.

**Proposição 5.1** *Seja $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$ um grafo com $2n$ vértices e $(G,\overline{G})$ uma decomposição complementar de $H$. Então*

*(i)* $h(H) = h(G) + h(\overline{G})$;
*(ii)* $g(H) = g(G) + g(\overline{G})$;
*(iii)* $con(H) = n + \max\{con(G), con(\overline{G})\}$.

*Prova*. Seja $(G,\overline{G})$ uma decomposição complementar de $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_\emptyset)$. Note que $H$ é um grafo desconexo obtido pela união disjunta de $G$ e $\overline{G}$.

*(i)-(ii)* Observe que os números envoltório e geodético de um grafo $G$ desconexo são dados pela soma dos respectivos parâmetros em cada uma de suas componentes conexas. A partir disso, segue imediatamente que $h(H) = h(G) + h(\overline{G})$ e $g(H) = g(G) + g(\overline{G})$.

*(iii)* Sejam $S_1$ e $S_2$ conjuntos convexos próprios máximos de $G$ e $\overline{G}$, respectivamente. Sem perda de generalidade, considere $|S_1| \geq |S_2|$. Note que $S = S_1 \cup V(\overline{G})$ é um conjunto convexo próprio de $V(H)$ e $|S| = |S_1| + |V(\overline{G})| = |S_1| + |V(G)|/2$. Desta forma, segue que $con(H) = n + \max\{con(G), con(\overline{G})\}$. □

Lembramos que o *join* dos grafos $G$ e $H$, denotado $G + H$, é o grafo formado por $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ e } v \in V(H)\}$.

Além disso, se $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}})$, então $H$ é isomorfo a $H_1 + H_2$, onde $(H_1, H_2)$ é uma decomposição complementar de $H$.

Em Pelayo [93], são descritos alguns parâmetros adicionais utilizados para determinar algumas invariantes da convexidade geodética para o *join* de dois grafos. Antes do resultado, faremos mais algumas definições, seguindo a terminologia deste mesmo autor.

Seja $G$ um grafo. Um conjunto *dois-geodético* de $G$ é um conjunto $D \subseteq V(G)$ tal que todo vértice de $G$ está em algum caminho mínimo de comprimento 2 ligando dois vértices de $D$. A cardinalidade de um conjunto dois-geodético mínimo de $G$ é denotada por $g_2(G)$. Expressamos por $\omega(G)$ a cardinalidade de uma clique máxima em $G$.

**Proposição 5.2** *Seja $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}})$ um grafo com $2n$ vértices e $(G, \overline{G})$ uma decomposição complementar de $H$. Então*

*(i)*
$$h(H) = \begin{cases} 2, & \text{se } G \text{ e } \overline{G} \text{ não são completos;} \\ n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*(ii)*
$$g(H) = \begin{cases} \min\{g_2(G), g_2(\overline{G})\}, & \text{se } G \text{ e } \overline{G} \text{ não são completos;} \\ n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*(iii)*
$$con(H) = \begin{cases} \omega(G) + \omega(\overline{G}) = \omega(H), & \text{se } G \text{ e } \overline{G} \text{ não são completos;} \\ 2n-1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Prova*. Seja $H \in$ COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}})$ e $(G, \overline{G})$ uma decomposição complementar de $H$. De início note que, como $H$ é instância-*sim* de COMP-SUB$(\Pi_{K_{n,n}})$, $G$ e $\overline{G}$ não são ambos grafos completos. Perceba também que se um dos grafos $G$ ou $\overline{G}$ é isomorfo a $K_n$ então o outro deve ser necessariamente isomorfo a $\overline{K}_n$. Isso implica que se $G$ ou $\overline{G}$ é completo, então $H$ é um grafo *split* completo.

*(i)* Suponha que $G$ e $\overline{G}$ são não completos. Então, seja $uu' \notin E(G)$, $vv' \notin E(\overline{G})$ e $S = \{u, u'\}$. Obtemos que $V(\overline{G}) \subseteq I_H[u, u']$ e $V(G) \subseteq I_H^2[v, v']$. Portanto $S$ é um conjunto envoltório de $H$ e $h(H) = 2$.

Agora considere que $G$ ou $\overline{G}$ é completo. Isso implica que $G + \overline{G} = H$ é um grafo *split* completo e por Dourado et al. [48] temos que $h(H) = n$.

*(ii)* A igualdade $g(H) = \min\{g_2(G), g_2(\overline{G})\}$ segue de Pelayo [93]. Mesmo assim, limites superiores e inferiores justos podem ser obtidos. Note que $G$ e $\overline{G}$ são grafos não triviais, então $g(H) \geq 2$. Agora sejam $uu' \notin E(G)$, $vv' \notin E(\overline{G})$ e $S = \{u, u', v, v'\}$. Como $V(\overline{G}) \subseteq I_H[u, u']$ e $V(G) \subseteq I_H[v, v']$, $S$ é um conjunto geodético de $H$ e $g(H) \leq 4$. Além disso, Pelayo [93] mostra que $2 \leq \min\{g_2(G), g_2(\overline{G})\} \leq 4$.

Por outro lado, sem perda de generalidade, se $G$ é não completo e $\overline{G}$ é completo, então $H$ é um grafo *split* completo. Assim concluímos que $g(H) = n$ [34].

*(iii)* Se $G$ e $\overline{G}$ são grafos não completos, o resultado $con(H) = \omega(G) + \omega(\overline{G}) = \omega(H)$ segue de Pelayo [93]. Caso contrário, seja $u \in V(G)$. Como $G$ e $\overline{G}$ são grafos completos, $u$ é um vértice simplicial em $H$. Logo $V(H) \setminus \{u\}$ é um conjunto convexo próprio de $H$ e $con(H) = 2n - 1$. □

Evidenciamos que as ideias apresentadas neste capítulo podem ser adaptadas tanto para outras convexidades em grafos quanto para outros parâmetros que ficaram fora do escopo desta tese.

CAPÍTULO 6

# O Número Envoltório Geodético para Prismas Complementares

Este capítulo contém nossos resultados acerca do número envoltório geodético para prismas complementares. Seja $H = G\overline{G}$ um prisma complementar. Lembramos que $H$ corresponde ao produto complementar $G\square K_2(S)$ com $|S| = 1$. Além disso $H \in \text{COMP-SUB}(\Pi_{\text{PERF}})$ quando $\Pi_{\text{PERF}}$ é a propriedade de arestas que expressa um emparelhamento perfeito entre vértices de mesmo rótulo em cada subgrafo da partição complementar de $H$. Antes dos nossos resultados, faremos uma retomada de algumas terminologias sobre convexidade utilizadas ao longo deste capítulo e apresentaremos alguns trabalhos no contexto do número envoltório geodético.

Seja $G$ um grafo. O *intervalo fechado* entre dois vértices $u, v \in V(G)$, denotado por $I_G[u,v]$, consiste de $u, v$ juntamente com todos os vértices pertencentes a todo caminho mínimo entre $u$ e $v$. Se não existe um caminho entre $u$ e $v$, então $I_G[u,v] = \{u,v\}$. Assim, o intervalo fechado de $S \subseteq V(G)$, denotado por $I_G[S]$, é a união de todos os intervalos $I_G[u,v]$ para todo vértice $u, v \in S$. O conjunto $S$ é um *conjunto convexo*, se $I_G[S] = S$.

Vamos definir agora o fecho convexo de $S$ em função das iterações da operação de intervalo fechado. Para isso, seja $I_G^0[S] = S$ e considere $I_G^{k+1}[S] = I_G[I_G^k[S]]$ para $k \geq 0$. A partir de algum termo $p$, a sequência será constante, então quando $I_G^p[S] = I_G^{p+1}[S]$ obtém-se o *fecho convexo* de $S$ denotado por $H_G(S)$. O conjunto $S$ é chamado *conjunto envoltório* de $G$, se $H_G(S) = V(G)$. A cardinalidade $h(G)$ do menor conjunto envoltório de $G$ é o *número envoltório* ou *número envoltório geodético* de $G$. Para as notações $I_G[S]$ e $H_G(S)$, quando o grafo $G$ estiver claro pelo contexto, omitiremos o seu subscrito, passando a utilizar as notações $I[S]$ e $H(S)$.

A primeira discussão sobre o número envoltório se deve a Everett e Seidman [65], em 1985. Mais tarde, em 2004, outros autores como Cagaanan e Canoy [16] estudam o número envoltório do produto Cartesiano de dois grafos conexos e, em 2005, Hernando et al. [81] mostram o número envoltório de caminhos, ciclos, grafos completos, árvores, rodas, bipartidos completos e hipercubos.

Ainda no contexto deste tema, Dourado et al. [48] apresentam algoritmos de

tempo polinomial para computar $h(G)$ quando $G$ é um grafo de intervalo unitário, um cografo ou um grafo *split* e mostram também que, dado um grafo $G$ e um inteiro $k$, é NP-completo decidir se $h(G) \leq k$. Araujo et al. [3], apresentam limites superiores do número envoltório para grafos sem vértices simpliciais, para grafos regulares ou sem triângulo e para grafos com cintura pelo menos seis. Albenque e Knauer [1], e Dourado, Penso e Rautenbach [50] mostram que o problema de decisão relacionado ao número envoltório é NP-completo para cubos parciais e grafos livres de $P_9$, respectivamente.

Considerando prismas complementares, Duarte [60] mostra resultados do número envoltório para prismas complementares de grafos completos, caminhos e ciclos. Nascimento [90] determina o número envoltório em prismas complementares de árvores, em prismas complementares $G\overline{G}$ quando $G$ é um grafo desconexo e quando $G$ é um cografo. Este último autor também mostra que na convexidade geodética o número envoltório para prismas complementares de grafos $G$ e $\overline{G}$ ambos conexos pode ser ilimitado.

Resolvemos dar continuidade ao trabalho de Nascimento [90], a fim de preencher a lacuna sobre o número envoltório para prismas complementares $G\overline{G}$ quando $G$ e $\overline{G}$ são conexos. Dizemos que um grafo $G$ é *autoconexo*, se $G$ e seu complemento $\overline{G}$ são ambos conexos.

## 6.1 Prismas Complementares de Grafos Gerais e de Grafos Não *Split*

Antes de demonstrarmos nossos resultados, vamos recorrer a algumas propriedades de conjuntos convexos geodéticos. Uma delas se refere aos vértices simpliciais de um grafo $G$, definida por Everett e Seidman [65]. Estes dois autores mostraram que qualquer conjunto envoltório de um grafo $G$ contém todos os vértices simpliciais de $G$, conforme enunciado no Lema 6.1. Ainda sobre vértices simpliciais, mas neste caso considerando $u$ um vértice simplicial em $G$ e $\overline{u}$ um vértice simplicial em $G$, qualquer conjunto envoltório de um grafo $G\overline{G}$, contém pelo menos um dos vértices $\{u, \overline{u}\}$, como enunciado no Lema 6.2 de Nascimento [90]. Por último, enunciamos mais dois lemas que serão úteis nas demonstrações seguintes.

**Lema 6.1 (Everett e Seidman [65])** *Para qualquer conjunto envoltório $S$ de um grafo $G$, $S$ contém todos os vértices simpliciais de $G$.*

**Lema 6.2 (Nascimento [90])** *Seja $G$ um grafo. Se $u$ é um vértice simplicial em $G$ e $\overline{u}$ é um vértice simplicial em $\overline{G}$, então qualquer conjunto envoltório $S$ de $G\overline{G}$ intersecta $\{u, \overline{u}\}$.*

**Lema 6.3 (Dourado et al. [48])** *Seja $G$ um grafo e $S$ um subconjunto próprio e não vazio de $V(G)$. Se $V(G) \setminus S$ é convexo, então qualquer conjunto envoltório de $G$ contém pelo menos um vértice de $S$.*

**Lema 6.4 (Dourado et al. [48])** *Seja $G$ um grafo e $H$ um subgrafo isométrico de $G$. Então, para todo conjunto envoltório $S$ de $H$ temos $V(H) \subseteq H_G(S)$.*

**Proposição 6.5** *Seja $G$ um grafo, $S \subseteq V(G\overline{G})$ e $v_1 \dots v_k$ um caminho em $G$, com $k \geq 2$. Se $\{v_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_k\} \subseteq H(S)$, então $v_k \in H(S)$.*

*Prova.* A prova é por indução em $k$. Primeiro, seja $k = 2$. Como $v_1v_2 \in E(G)$ e $v_1, \overline{v}_2 \in H(S)$, $v_2 \in I[v_1, \overline{v}_2]$. Agora, considere $k > 2$. Seja $v_1 \dots v_{k-1}v_k$ um caminho em $G$ e suponha que $\{v_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_{k-1}, \overline{v}_k\} \subseteq H(S)$. Pela hipótese de indução $v_{k-1} \in H(S)$, o que implica que $v_k \in I[v_{k-1}, \overline{v}_k]$. Pelos dois casos, segue-se que $v_k \in H(S)$, com $k \geq 2$. □

Iniciamos mostrando que para o prisma complementar de um grafo não *split* autoconexo o número envoltório geodético é limitado a três. Este resultado segue no Teorema 6.6. Lembramos que, para um conjunto $X \subseteq V(G)$, denotamos por $\overline{X}$ o *conjunto de vértices correspondentes* de $X$ em $V(\overline{G})$.

**Teorema 6.6** *Seja $G$ um grafo não split autoconexo. Então $h(G\overline{G}) \leq 3$.*

*Prova.* Suponha que $G$ é um grafo não *split* autoconexo. Sabemos pelo Teorema 2.4 que $G$ é *split* se e somente se $G$ não tem um subgrafo isomorfo a $C_4$, $C_5$, ou $2K_2$. Para mostrar o limite superior $h(G\overline{G}) \leq 3$ construímos conjuntos envoltórios nos casos em que: (1) $C_4$ ou (2) $C_5$ ou (3) $2K_2$ são subgrafos induzidos de $G$.

**Caso 1.** $C_4$ é um subgrafo induzido de $G$.

Seja $V(C_4) = \{u_1, \dots, u_4\}$, $E(C_4) = \{u_iu_{i+1} : 1 \leq i \leq 3\} \cup \{u_4u_1\}$ e $S = \{u_1, \overline{u}_3, \overline{u}_4\}$. Mostraremos que $H(S) = V(G\overline{G})$.

Primeiro mostramos que $V(C_4) \cup \overline{V(C_4)} \subseteq H(S)$. Temos que $u_4 \in I[u_1, \overline{u}_4]$ e $\overline{u}_1 \in I[u_1, \overline{u}_3]$. Consequentemente $u_3 \in I[u_4, \overline{u}_3]$ e $u_2 \in I[u_1, u_3]$, então $\overline{u}_2 \in I[u_2, \overline{u}_4]$. Logo $V(C_4) \cup \overline{V(C_4)} \subseteq H(S)$.

Seja $A = (N_G(u_1) \cap N_G(u_3)) \cup (N_G(u_2) \cap N_G(u_4))$. Como $u_1u_3 \notin E(G)$ (resp. $u_2u_4 \notin E(G)$), então, para todo $v \in A$, $v \in I[u_1, u_3]$ (resp. $v \in I[u_2, u_4]$). Logo $A \subseteq H(S)$.

Seja $B = V(G) \setminus (A \cup V(C_4))$. Para todo $b \in B$, existem $i, j \in \{1, \dots, 4\}$, $i \neq j$, tais que $u_iu_j \in E(G)$ e $b \notin N_G(\{u_i, u_j\})$. Então $\overline{u}_i\overline{u}_j \notin E(\overline{G})$, consequentemente $\overline{b} \in I[\overline{u}_i\overline{u}_j]$, logo $\overline{B} \subseteq H(S)$.

Como $G$ é conexo, existe um caminho em $G$ entre cada vértice de $B$ e de $A \cup V(C_4)$. Como $\overline{B} \subseteq H(S)$, então a Proposição 6.5 implica que $B \subseteq H(S)$. Logo $V(G) \subseteq H(S)$. Como $\overline{G}$ é conexo, também pela Proposição 6.5, $\overline{A} \subseteq H(S)$. Portanto $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$.

**Caso 2.** $C_5$ é um subgrafo induzido de $G$.

Seja $V(C_5) = \{u_1, \ldots, u_5\}$, $E(C_5) = \{u_i u_{i+1} : 1 \leq i \leq 4\} \cup \{u_5 u_1\}$ e $S = \{u_1, u_4, \overline{u}_3\}$. Mostraremos que $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$.

Primeiro, vamos mostrar que $V(C_5) \cup \overline{V(C_5)} \subseteq H(S)$. Temos que $u_5 \in I[u_1, u_4]$, $\overline{u}_1 \in I[u_1, \overline{u}_3]$ e $u_3 \in I[u_4, \overline{u}_3]$. Então $u_2 \in I[u_1, u_3]$. Pela Proposição 6.5 (dual), temos que $\overline{u}_5, \overline{u}_4, \overline{u}_2 \in H(S)$. Consequentemente $V(C_5) \cup \overline{V(C_5)} \subseteq H(S)$.

Seja $A = \{v \in (N_G(u_i) \cap N_G(u_j)) : u_i u_j \notin E(G)\}$, para $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$, $i \neq j$. Pela definição de $A$, para todo $v \in A$, existem $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$, $i \neq j$, tais que $u_i u_j \notin E(G)$. Isso implica que $v \in I[u_i, u_j]$. Logo $A \subseteq H(S)$.

Agora, seja $B = V(G) \setminus (A \cup V(C_5))$. Para todo $b \in B$, existem $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$, $i \neq j$, tais que $u_i u_j \in E(G)$ e $b \notin N_G(\{u_i, u_j\})$. Então $\overline{u}_i \overline{u}_j \notin E(\overline{G})$, assim $\overline{b} \in I[\overline{u}_i, \overline{u}_j]$. Consequentemente $\overline{B} \subseteq H(S)$.

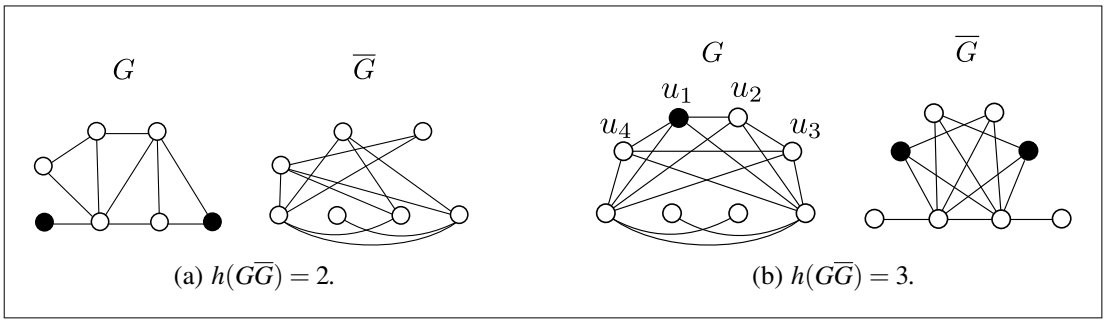
Como $G$ é conexo, existe um caminho em $G$ ligando cada vértice de $B$ a algum vértice em $A \cup V(C_5)$. Como $\overline{B} \subseteq H(S)$, então a Proposição 6.5 implica que $B \subseteq H(S)$. Logo $V(G) \subseteq H(S)$. Como $\overline{G}$ é conexo, também pela Proposição 6.5, $\overline{A} \subseteq H(S)$. Portanto $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$.

**Caso 3.** $2K_2$ é um subgrafo induzido de $G$.

Como $2K_2$ (resp. $G\overline{G}$) é isomorfo a $\overline{C}_4$ (resp. $\overline{G}G$), consideramos $\overline{G}G$ e a prova segue pelo Caso 1.

Como existe um conjunto envoltório de ordem três em todos os casos, o limite superior $h(G\overline{G}) \leq 3$ é satisfeito para um grafo não *split* $G$. □

A Figura 6.1 contém dois exemplos de prismas complementares $G\overline{G}$ para os quais $h(G\overline{G}) \leq 3$. O limite do Teorema 6.6 é justo, como pode ser visto na Figura 6.1(b). Os vértices em preto representam um conjunto envoltório de cada prisma complementar $G\overline{G}$. Por conveniência, as arestas que ligam cada par de vértices correspondentes de $G$ e $\overline{G}$ não estão representadas na figura.




(a) $h(G\overline{G}) = 2$. (b) $h(G\overline{G}) = 3$.

**Figura 6.1:** *Exemplos de prismas complementares $G\overline{G}$ satisfazendo $h(G\overline{G}) \leq 3$.*

Obtemos um resultado de limite inferior considerando o diâmetro dos grafos $G$ e $\overline{G}$, enunciado a seguir.

**Teorema 6.7** *Seja $G$ um grafo autoconexo. Se $diam(G) = 2$ e $diam(\overline{G}) = 2$, então $h(G\overline{G}) \geq 3$.*

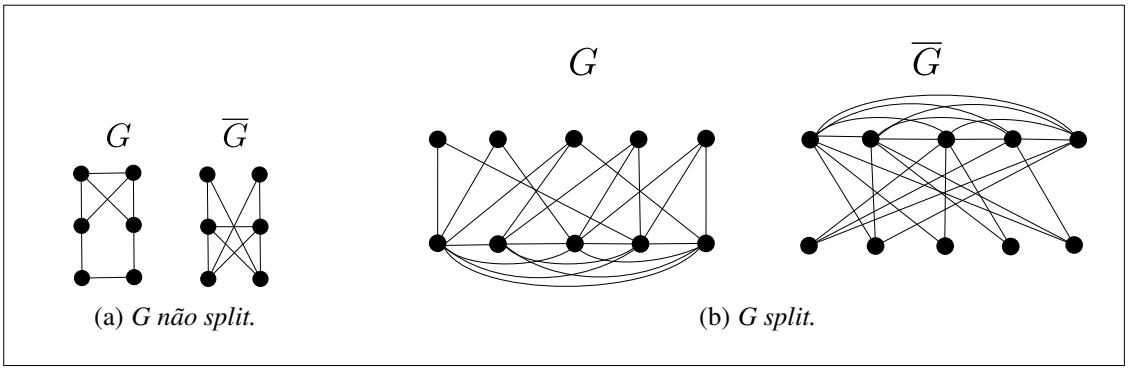
*Prova*. Seja $G$ um grafo autoconexo com $diam(G) = 2$ e $diam(\overline{G}) = 2$. Por contradição, suponha que $h(G\overline{G}) < 3$. Mostraremos que todo conjunto $S \subseteq V(G\overline{G})$ tal que $|S| < 3$ não é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$. Primeiro, sejam $u, v \in V(G)$. Considere $S_1 = \{u, v\}$ e $S_2 = \{\overline{u}, \overline{v}\}$.

Como $diam(G) = 2$ e $diam(\overline{G}) = 2$, $H(S_1) \cap V(\overline{G}) = \emptyset$ (resp. $H(S_2) \cap V(G) = \emptyset$), então $S_1$ (resp. $S_2$) não é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$.

Agora, sejam $u \in V(G)$, $\overline{v} \in V(\overline{G})$ e $S_3 = \{u, \overline{v}\}$. Se $uv \in E(G)$ (resp. $uv \notin E(G)$), então $H(S_3) = \{u, v, \overline{v}\}$ (resp. $H(S_3) = \{u, \overline{u}, \overline{v}\}$). Como $\overline{u} \notin H(S_3)$ (resp. $v \notin H(S_3)$) então $S_3$ não é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$.

□

Ainda sobre o Teorema 6.7, note que existem tanto grafos *split* quanto grafos não *split* que satisfazem a condição $diam(G) = diam(\overline{G}) = 2$. Veja exemplos para estes dois casos na Figura 6.2.




(a) *G não split.* (b) *G split.*

**Figura 6.2:** *Exemplos de prismas complementares de grafos autoconexos satisfazendo $diam(G) = diam(\overline{G}) = 2$.*

Os Teoremas 6.6 e 6.7 implicam na igualdade do Corolário 6.8.

**Corolário 6.8** *Seja $G$ um grafo não split autoconexo. Se $diam(G) = diam(\overline{G}) = 2$, então $h(G\overline{G}) = 3$.*

*Prova*. Segue diretamente dos Teoremas 6.6 e 6.7. □

Consideramos agora grafos $G$ com $diam(G) > 3$. Mostramos no Teorema 6.9 que o número envoltório de $G\overline{G}$ é igual a dois.

**Teorema 6.9** *Seja $G$ um grafo autoconexo. Se $diam(G) > 3$, então $h(G\overline{G}) = 2$.*

*Prova*. Seja $G$ um grafo autoconexo. Suponha que $diam(G) > 3$. Note que esta condição do diâmetro implica que $G$ não é *split*. Como $diam(G) > 3$, existem pelo menos dois vértices $x, y \in V(G)$ tais que $d_G(x,y) > 3$. Desta forma, podemos definir um caminho induzido $P = u_1u_2u_3u_4u_5$ em $G$ tal que $d_G(u_1,u_5) = 4$. Seja $S = \{u_1,u_4\}$. Mostraremos que $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$.

Seja $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$. Como $u_1u_2u_3u_4$ e $u_1\overline{u}_1\overline{u}_4u_4$ são caminhos mínimos entre $u_1$ e $u_4$ temos que $U \cup \{\overline{u}_1,\overline{u}_4\} \subseteq I[S]$. Por conseguinte $\overline{u}_2 \in I[u_2,\overline{u}_4]$ e $\overline{u}_3 \in I[u_3,\overline{u}_1]$, o que implica que $U \cup \overline{U} \subseteq H(S)$.

Para completar a prova de que $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$, mostraremos que para todo vértice $z \in V(G) \setminus U$, o seu vértice correspondente $\overline{z}$ pertence a $H(S)$. Consideramos três casos, dependendo da quantidade de vizinhos que $z$ possui no conjunto $U$. Note que, como $d_{G\overline{G}}(u_1,u_4) = 3$, $z$ não é adjacente a ambos $u_1$ e $u_4$.

**Caso 1.** $|N_G(z) \cap U| \leq 1$.

Neste caso, $\overline{z}$ é adjacente a dois vértices não adjacentes de $\{\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3,\overline{u}_4\}$, digamos $\overline{u}_i$ e $\overline{u}_j$, para $i,j \in \{1,\ldots,4\}$, $i \neq j$. Então $\overline{z} \in I[\overline{u}_i,\overline{u}_j]$.

**Caso 2.** $|N_G(z) \cap U| = 2$.

Suponha que $z$ tem dois vizinhos $u_i,u_j \in U$, para $i,j \in \{1,\ldots,4\}$, $i \neq j$. Se $i,j \in \{1,2\}$ (resp. $i,j \in \{3,4\}$), $i \neq j$, recaímos no argumento do Caso 1. Veja que $\overline{u}_5 \in I[\overline{u}_1,\overline{u}_2]$, pelo Caso 1. Se $i,j \in \{2,3\}$, $i \neq j$, temos que $\overline{z} \in I[\overline{u}_4,\overline{u}_5]$. Se $i,j \in \{1,3\}$, (resp. $i,j \in \{2,4\}$) $i \neq j$, temos que $z \in I[u_1,u_4]$. Como $z \in H(S)$, então $\overline{z} \in I[z,\overline{u}_k]$, para $k = 2$ (resp. $k = 3$).

**Caso 3.** $|N_G(z) \cap U| = 3$.

Suponha que $z$ tem três vizinhos $u_i,u_j,u_k \in U$, para $i,j,k \in \{1,\ldots,4\}$, $i \neq j \neq k$. Como $d_{G\overline{G}}(u_1,u_4) = 3$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ ou $\{2,3,4\}$. Então temos que $z \in I[u_1,u_4]$. Como $z \in H(S)$, então $\overline{z} \in I[z,\overline{u}_k]$, para $k = 4$ ou $k = 1$.

Dos casos acima, concluímos que para todo $z \in V(G) \setminus U$, $\overline{z} \in H(S)$. Desta forma, temos que $V(\overline{G}) \subseteq H(S)$. Como $G$ é conexo e $U \cup V(\overline{G}) \subseteq H(S)$, a Proposição 6.5 implica que $V(G) \subseteq H(S)$. Portanto, $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$ e $h(G\overline{G}) = 2$, o que completa a prova. □

## 6.2 Prismas Complementares de Grafos *Split*

As definições e lema seguintes caracterizam alguns conjuntos convexos em grafos *split*. Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo *split*. Lembramos que o *grafo de componentes* $G'$ de $G$ é o grafo bipartido obtido a partir de $G$ através da remoção das arestas do grafo

induzido por $C$. A notação $c(G')$ especifica o número de componentes conexas de $G'$. Além disso, nos referimos a $nt(G')$ e $t(G')$ como o número de componentes não triviais e triviais de $G'$, respectivamente, e denotamos o conjunto $\{1,\ldots,k\}$ por $[k]$.

**Definição 6.10** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split. Definimos o conjunto $L(G_i)$ de uma componente $G_i$ de $G'$ como*

$$L(G_i) = V(G_i) \cup (V(\overline{G}_i) \cap \overline{C}),$$

*para todo $i \in [c(G')]$.*

Veja na Figura 6.3 exemplos de conjuntos $L(G_i)$ de $G'$, para $i \in [3]$.

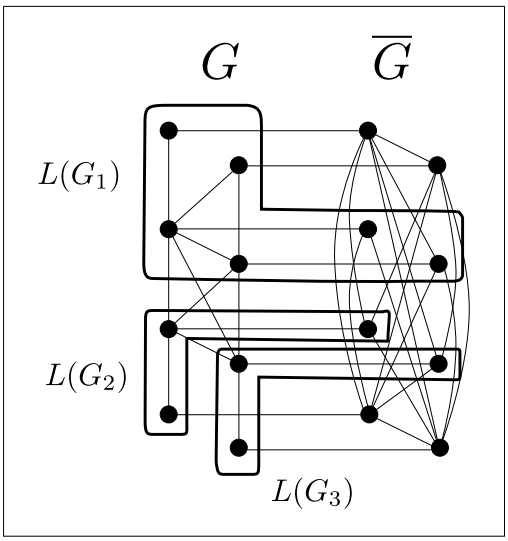



**Figura 6.3:** *Conjuntos $L(G_i)$ de $G'$ no grafo $G\overline{G}$, para $i \in [3]$.*

**Lema 6.11** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split autoconexo. O conjunto $V(G\overline{G}) \setminus L(G_i)$ é convexo em $G\overline{G}$, para todo $i \in [c(G')]$.*

*Prova.* Seja $i \in [c(G')]$. Mostramos que para todo $w, w' \in V(G\overline{G}) \setminus L(G_i)$, $I[w,w'] \cap L(G_i) = \emptyset$. Temos três casos:

1. $w, w' \in V(G) \setminus V(G_i)$;
2. $\overline{w}, \overline{w}' \in V(\overline{G}) \setminus (V(\overline{G}_i) \cap \overline{C})$;
3. $w \in V(G) \setminus V(G_i)$ e $\overline{w}' \in V(\overline{G}) \setminus (V(\overline{G}_i) \cap \overline{C})$.

**Caso 1.** Seja $w, w' \in V(G) \setminus V(G_i)$, e $v \in L(G_i)$.

Todo caminho entre $w$ e $w'$ que contém $v$ tem tamanho pelo menos 4, e assim não é um caminho mínimo, já que $diam(G\overline{G}) \leq 3$.

**Caso 2.** Seja $\overline{w}, \overline{w}' \in V(\overline{G}) \setminus (V(\overline{G}_i) \cap \overline{C})$, e $v \in L(G_i)$.

Seja $P$ um caminho mínimo entre $\overline{w}$, e $\overline{w}'$ que passe por $v$. Claramente, $\bar{w}\bar{w}' \notin E(\overline{G})$ e portanto $ww' \in E(G)$.

Se $v \in V(G_i)$, isso implica que $v = w$ ou $v = w'$, mas isso é uma contradição, já que ambos $w, w'$ não podem pertencer a $I$ e um de $w, w'$ dever pertencer a $V(G_i) \cap C$. Se $v \in V(\overline{G}_i) \cap \overline{C}$, $N_{\overline{G}}(v)$ é uma clique, então $P$ não pode ser um caminho mínimo entre $\overline{w}$, e $\overline{w}'$, uma contradição.

**Caso 3.** Seja $w \in V(G) \setminus V(G_i)$, e $\overline{w}' \in V(\overline{G}) \setminus (V(\overline{G}_i) \cap \overline{C})$.

Se $\overline{w}' = \overline{w}$, então $I[w, \overline{w}'] = \{w, \overline{w}'\}$. Agora suponha que $\overline{w}' \neq \overline{w}$. Se $ww' \notin E(G)$, então $I[w, \overline{w}'] = \{w, \overline{w}', \overline{w}\}$. Caso contrário, $ww' \in E(G)$, então $I[w, \overline{w}'] = \{w, \overline{w}', w'\}$. Consequentemente $I[w, \overline{w}'] \cap L(G_i) = \emptyset$.

Em todos os casos, obtemos que para todo $w, w' \in V(G\overline{G}) \setminus L(G_i)$, $I[w, w'] \cap L(G_i) = \emptyset$. Portanto, o conjunto $V(G\overline{G}) \setminus L(G_i)$ é convexo em $G\overline{G}$, para todo $i \in [c(G')]$. □

Observe que desde que $G$ é *split*, $\overline{G}$ também o é. Então podemos obter, de acordo com a Definição 2.5, um grafo de componentes $(\overline{G})'$ para $\overline{G}$. Para evitar sobrecarga de notação, em vez de $(\overline{G})'$, utilizamos simplesmente $\overline{G}'$. O Lema 6.11 vale também para $\overline{G}G$, isto é, considerando $\bigcup_{j=1}^{c(\overline{G}')} \overline{G}_j$ as componentes de $\overline{G}'$, temos que o conjunto $V(\overline{G}G) \setminus L(\overline{G}_j)$ é convexo $\overline{G}G$, para todo $j \in [c(\overline{G}')]$. Em vista disso, obtemos o resultado do Teorema 6.12.

**Teorema 6.12** *Seja $G$ um grafo split autoconexo. Então $h(G\overline{G}) \geq \max\{c(G'), c(\overline{G}'), 2\}$.*

*Prova.* Pelo Lema 6.11, $V(G\overline{G}) \setminus L(G_i)$, para todo $i \in [c(G')]$, e $V(G\overline{G}) \setminus L(\overline{G}_j)$, para todo $j \in [c(\overline{G}')]$, são conjuntos convexos. Assim, o Lema 6.3 implica que todo conjunto envoltório de $G\overline{G}$ deve conter pelo menos um vértice de $L(G_i)$ e $L(\overline{G}_j)$. Como as componentes de $G_i$ (resp. $G_j$) são disjuntas duas a duas, cada vértice $v \in V(G)$ (resp. $\overline{v} \in V(\overline{G})$) intersecta exatamente um conjunto $L(G_i)$ (resp. $L(G_j)$). Isso implica que $h(G\overline{G}) \geq \max\{c(G'), c(\overline{G}')\}$. Se $G'$ ou $\overline{G}'$ é desconexo, o resultado segue.

Agora, sejam $G'$ e $\overline{G}'$ grafos conexos. Então $c(G') = 1$ e $c(\overline{G}') = 1$, o que implica que $\max\{c(G'), c(\overline{G}')\} = 1$. Como $|V(G)| \geq 2$, $h(G\overline{G}) \geq 2$, logo obtemos o resultado $h(G\overline{G}) \geq \max\{c(G'), c(\overline{G}'), 2\}$. □

Prosseguindo com os limites superiores, apresentamos primeiro alguns lemas úteis. Seja $S$ um conjunto de vértices de um grafo $G$. No Lema 6.13 mostramos que para dois vértices $u, v \in V(G)$ de distância três, se $u, v \in H(S)$, então os vértices de suas vizinhanças fechadas $N_G[\{u, v\}]$ bem como os vértices de $\overline{N_G[\{u, v\}]}$ pertencerão a $H(S)$.

**Lema 6.13** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split autoconexo, $u, v \in I$ e $S \subseteq V(G\overline{G})$. Se $d_G(u,v) = 3$ e $u, v \in H(S)$, então $N_G[\{u,v\}] \cup \overline{N_G[\{u,v\}]} \subseteq H(S)$.*

*Prova.* Sejam $u, v \in I$ tais que $d_G(u,v) = 3$. Como $N_G(u) \cup N_G(v) \subseteq C$, temos que $u\bar{u}\bar{v}v$ e $uxyv$, para $x \in N_G(u)$ e $y \in N_G(v)$, são caminhos mínimos entre $u$ e $v$. Logo, $N_G(u) \cup N_G(v) \cup \{\bar{u}, \bar{v}\} \subseteq I[u,v]$. Como $uy, vx \notin E(G)$, para $x \in N_G(u)$ e $y \in N_G(v)$, temos que $\bar{u}\bar{y}, \bar{v}\bar{x} \in E(\overline{G})$. Consequentemente $\bar{x} \in I[x,\bar{v}]$ e $\bar{y} \in I[y,\bar{u}]$. Portanto $N_G[\{u,v\}] \cup \overline{N_G[\{u,v\}]} \subseteq H(S)$. □

Trabalhamos com grafos *split* $G$ que possuem apenas uma componente trivial em $G'$. Uma componente trivial em $G'$ é um vértice de $C$ que não é adjacente a nenhum vértice de $I$, então estamos no Caso (a) da Observação 2.3. No Lema 6.14 mostramos que se $G'$ tem apenas uma componente trivial, então $\overline{G}'$ também tem apenas uma componente trivial e vice-versa.

**Lema 6.14** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split autoconexo. Então $t(G') = 1$ se e somente se $t(\overline{G}') = 1$.*

*Prova.* Suponha que $t(G') = 1$. Seja $v$ o único vértice da componente trivial de $G'$ (veja na Figura 6.4). Como $N_G[v] = C$, $N_{\overline{G}}(\bar{v}) = \bar{I}$, logo $\bar{I} \cup \{\bar{v}\}$ é uma clique de $\overline{G}$. Como $t(G') = 1$, para todo $u \in C \setminus \{v\}$, $|N_G(u) \cap I| \geq 1$. Isso implica que, para todo $\bar{u} \in \overline{C} \setminus \{\bar{v}\}$, $|N_{\overline{G}}(\bar{u})| \leq |\bar{I}| - 1$. Então $\bar{I} \cup \{\bar{v}\}$ é a única clique máxima de $\overline{G}$.

Como $C$ é máxima, para todo $y \in I$, temos que $|N_G(y)| < |C|$ e como $C$ é única, não existe $y \in I$ tal que $y$ seja adjacente a $|C| - 1$ vértices. Então, para todo $y \in I$, $|N_G(y)| \leq |C| - 2$. Isso implica que, para todo $\bar{y} \in \bar{I}$, $|N_{\overline{G}}(\bar{y}) \cap \overline{C}| \geq 2$.

Como, para todo $\bar{y} \in \bar{I}$, $N_{\overline{G}}(\bar{y}) \cap \overline{C} \neq \emptyset$, segue que $\bar{v}$ é a única componente trivial de $\overline{G}'$, portanto $t(\overline{G}') = 1$.

Reciprocamente, suponha que $t(\overline{G}') = 1$. Como $\overline{G}$ também é um grafo *split*, por argumentos similares aos anteriores, agora aplicados para $\overline{G}'$, concluímos que $t(G') = 1$. □

Para uma ilustração do grafo $G\overline{G}$ considerado no Lema 6.14, veja a Figura 6.4.

Seja $G$ um grafo *split* autoconexo. Como fizemos com os limites inferiores, estabelecemos uma relação entre $h(G\overline{G})$ e o número de componentes de $G'$. Para tal, dividimos a prova considerando o número de componentes triviais e não triviais de $G'$. O caso em que pelo menos um dos parâmetros $nt(G'), t(G'), nt(\overline{G}')$ ou $t(\overline{G}')$ é maior ou igual a dois é provado no Teorema 6.15. Os casos restantes seguem nos Teoremas 6.18 e 6.19.

**Teorema 6.15** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split autoconexo. Se $\max\{nt(G'), t(G'), nt(\overline{G}'), t(\overline{G}')\} \geq 2$, então $h(G\overline{G}) \leq \max\{c(G'), c(\overline{G}')\}$.*

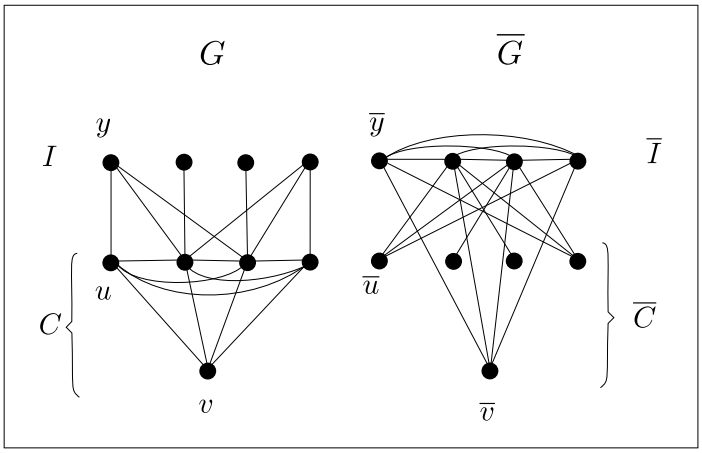



**Figura 6.4:** *Ilustração do Lema 6.14.*

*Prova*. Para esta prova consideramos dois casos: (1) $nt(G') \geq 2$ ou $nt(\overline{G}') \geq 2$, e (2) $t(G') \geq 2$ ou $t(\overline{G}') \geq 2$. Como $\overline{G}$ é *split*, $G\overline{G}$ é isomorfo a $\overline{G}G$. Então, sem perda de generalidade, podemos considerar que $c(G') \geq c(\overline{G}')$. Em vista disso, mostramos conjuntos envoltórios de $G\overline{G}$ em cada caso: (1) $nt(G') \geq 2$ e (2) $t(G') \geq 2$.

**Caso 1.** $nt(G') \geq 2$.

Sejam $\mathfrak{I}_1 = \{i \in [c(G')] : |V(G_i)| = 1\}$ e $\mathfrak{I}_2 = [c(G')] \setminus \mathfrak{I}_1$.

Para todo $k \in [c(G')]$, obtemos o conjunto $S$ escolhendo $u_k \in V(G_k)$ tal que $V(G_k) = \{u_k\}$ se $k \in \mathfrak{I}_1$ e $u_k \in V(G_k) \setminus C$ se $k \in \mathfrak{I}_2$ (veja na Figura 6.5(a)). Note que $|S| = c(G')$. Mostramos que $H(S) = V(G\overline{G})$.

Por hipótese, $|\mathfrak{I}_2| \geq 2$. Para todo $i, j \in \mathfrak{I}_2$, como $d_G(u_i, u_j) = 3$, o Lema 6.13 implica que $N_G[\{u_i, u_j\}] \cup \overline{N_G[\{u_i, u_j\}]} \subseteq H(S)$.

Sejam $u \in N_G(u_i)$, $v \in N_G(u_j)$, para $i, j \in \mathfrak{I}_2$, $A = I \setminus N_G(u)$ e $B = I \setminus N_G(v)$. Temos que $\overline{A} \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{u})$, então $\overline{A} \subseteq I[\overline{u}, \overline{u}_i]$. Similarmente, $\overline{B} \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{v})$, então $\overline{B} \subseteq I[\overline{v}, \overline{u}_j]$. Como $A \cup B = I$, $\overline{I} \subseteq H(S)$.

Agora, mostramos que para todo $y \in I \setminus \{u_i, u_j\}$, $y \in H(S)$. Seja $y \in I \setminus \{u_i, u_j\}$ tal que $d_G(x, y) = 1$, para algum $x \in C \cap H(S)$. Como $G$ é conexo, $x$ existe. Como $\overline{I} \cup \{x\} \subseteq H(S)$, temos que $y \in I[x, \overline{y}]$. Desta forma, $N_G(y) \subseteq I[y, x']$, para algum $x' \in C$ tal que $yx' \notin E(G)$. Consequentemente $C \subseteq H(S)$. Logo, $\overline{C} \subseteq I[C \cup \overline{I}]$. Portanto $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$, e $h(G\overline{G}) \leq c(G')$.

**Caso 2.** $t(G') \geq 2$.

Se $nt(G') \geq 2$ recaímos no Caso 1. Assim, considere que $nt(G') = 1$. Sejam $G_1$ a componente não trivial de $G'$ e $G_i$, para todo $i \in [c(G')] \setminus \{1\}$, as componentes triviais de $G'$. Para algum $x \in V(G_1) \cap C$, seja $S = V(\overline{G}_i) \cup \{x\}$, para todo $i \in [c(G')] \setminus \{1\}$ (veja na Figura 6.5(b)). Note que $|S| = c(G')$. Mostramos que $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$.

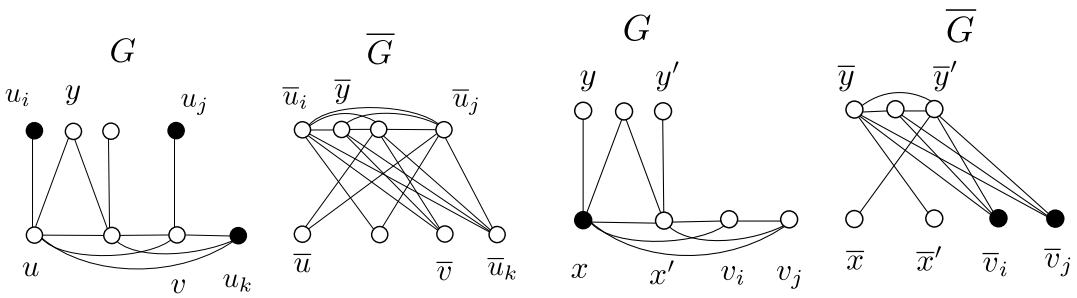
Por hipótese, $t(G') \geq 2$. Então existem $i, j \in [c(G')] \setminus \{1\}$ tais que $G_i$ e $G_j$ são componentes triviais em $G'$. Seja $v_i$ (resp. $v_j$) o único vértice de $V(G_i)$ (resp. $V(G_j)$).

Como $v_iv_j \in E(G)$, $\overline{v}_i\overline{v}_j \notin E(\overline{G})$. Consequentemente, $\overline{v}_i\overline{y}\overline{v}_j$ é um caminho mínimo entre $\overline{v}_i$, e $\overline{v}_j$, para todo $\overline{y} \in \overline{I}$. Então $\overline{I} \subseteq I[\overline{v}_i, \overline{v}_j]$.

Como $d_G(x, v_i) = 1$, temos que $v_i \in I[x, \overline{v}_i]$, para todo $i \in [c(G')] \setminus \{1\}$. Como $d_G(x, y) = 1$, para todo $y \in I \cap N_G(x)$, obtemos que $y \in I[x, \overline{y}]$. Consequentemente $N_G(y) \subseteq I[y, v_i]$, para todo $y \in I \cap N_G(x)$. Como $G_1$ é conexa, para todo $y' \in I$, existe $x' \in C \cap H(S)$. Desde que $\overline{I} \subseteq H(S)$, $y' \in I[x', \overline{y}']$. Consequentemente $N_G(y') \subseteq C \subseteq H(S)$. Logo, $\overline{C} \subseteq I[C \cup \overline{I}]$. Portanto $S$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$, e $h(G\overline{G}) \leq c(G')$.

Em todos os casos, existe um conjunto envoltório de $G\overline{G}$ de ordem $c(G')$. Como $c(G') \geq c(\overline{G}')$, o resultado desejado $h(G\overline{G}) \leq \max\{c(G'), c(\overline{G}')\}$ segue. □

A Figura 6.5 ilustra os dois casos do Teorema 6.15. Os vértices em preto representam um conjunto envoltório de cada prisma complementar $G\overline{G}$. Por conveniência, as arestas entre cada par de vértices correspondentes de $G$ e $\overline{G}$ não estão representadas.




(a) *Caso 1 do Teorema 6.15.* (b) *Caso 2 do Teorema 6.15.*

**Figura 6.5:** *Exemplos de conjuntos envoltórios dos casos do Teorema 6.15.*

A classe dos prismas complementares $K_n\overline{K}_n\overline{K_n\overline{K}_n}$ recai no Caso 1 do Teorema 6.15, em que $h(K_n\overline{K}_n\overline{K_n\overline{K}_n}) = n$. Um exemplo de prisma complementar do grafo $K_4\overline{K}_4$ pode ser visto na Figura 6.6, onde os vértices em preto representam um conjunto envoltório geodético deste grafo.

Pelos Teoremas 6.12 e 6.15 obtemos a igualdade enunciada no Corolário 6.16. Este resultado evidencia que o número envoltório para prismas complementares de grafos *split* pode ser ilimitado.

**Corolário 6.16** *Seja* $G = (C \cup I, E)$ *um grafo split autoconexo. Se* $\max\{nt(G'), t(G'), nt(\overline{G}'), t(G')\} \geq 2$, *então* $h(G\overline{G}) = \max\{c(G'), c(\overline{G}')\}$.

*Prova*. Segue diretamente dos Teoremas 6.12 e 6.15. □

Agora, nos resta os casos em que $nt(G') < 2$, $nt(\overline{G}') < 2$, $t(G') < 2$ e $t(\overline{G}') < 2$. Como desconsideramos grafos triviais, temos que $nt(G') = 1$ e $nt(\overline{G}') = 1$. Pelo Lema

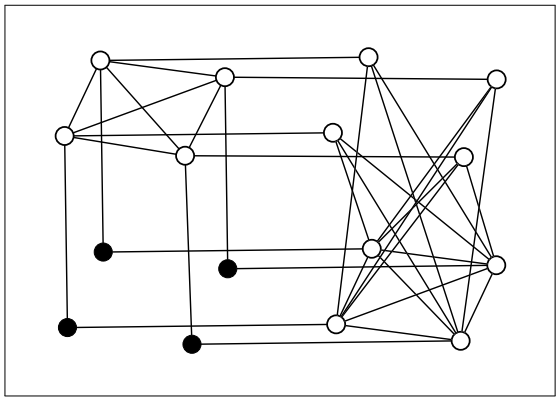


**Figura 6.6:** *Conjunto envoltório geodético do prisma complementar* $K_4\overline{K}_4\overline{K_4\overline{K}_4}$.

6.14 se $t(G') = 1$, então $t(\overline{G}') = 1$. Caso contrário, para $t(G') \neq 1$, temos que $t(\overline{G}') = 0$ ou $t(\overline{G}') \geq 2$. Se $t(\overline{G}') \geq 2$ a prova segue pelo Teorema 6.15 (Caso 2). Assim, restam os casos $t(G') = 0$, $t(\overline{G}') = 0$, e $t(G') = 1$, $t(\overline{G}') = 1$, que seguem nos Teoremas 6.18 e 6.19, respectivamente.

Mostramos primeiro uma proposição que será útil na prova do Teorema 6.18. A próxima proposição é uma ligeira modificação da Proposição 6.5 agora considerando um grafo *split* $G = (C \cup I, E)$. Para um conjunto de vértices $S$ de $G\overline{G}$, a Proposição 6.17 mostra que um vértice que pertence a um caminho no grafo de componentes $G'$ de $G$ pertencerá a $H(S)$ dependendo se alguns vértices em específico em $C \cup \overline{I}$ pertencem a $H(S)$.

**Proposição 6.17** *Seja* $G = (C \cup I, E)$ *um grafo split. Seja* $w_0v_1w_1 \ldots v_kw_k$ *(ou* $w_0v_1w_1 \ldots v_k$*), com* $k \geq 1$*, um caminho em* $G'$*, tal que* $v_i \in I$*, para todo* $i \in [k]$*, e* $w_j \in C$*, para todo* $j \in [k] \cup \{0\}$*. Considere que, para todo* $i \in [k]$*, existe* $z \in C$ *tal que* $v_iz \notin E(G)$*, e seja* $S \subseteq V(G\overline{G})$*. Se* $\{w_0, z, \overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k\} \subseteq H(S)$*, então* $w_k \in H(S)$ *(resp.* $v_k \in H(S)$*).*

*Prova.* A prova é por indução em $k$. Seja $k = 1$. Como $w_0, \overline{v}_1 \in H(S)$, e $v_1\overline{v}_1 \in E(G\overline{G})$, obtemos que $v_1 \in I[w_0, \overline{v}_1]$. Como $z \in H(S)$, e $v_1z \notin E(G)$, então $w_1 \in I[v_1, z]$.

Seja $k \geq 2$. Pela hipótese de indução, $w_{k-1} \in H(S)$. Então, como $\overline{v}_k \in H(S)$, temos que $v_k \in I[w_{k-1}, \overline{v}_k]$. Como $z \in H(S)$, e $v_kz \notin E(G)$, segue que $w_k \in I[v_k, z]$. □

**Teorema 6.18** *Seja* $G = (C \cup I, E)$ *um grafo split autoconexo tal que* $nt(G') = 1$, $nt(\overline{G}') = 1$, $t(G') = 0$ *e* $t(\overline{G}') = 0$*. Então* $h(G\overline{G}) \leq 3$*.*

*Prova.* Para provar $h(G\overline{G}) \leq 3$ construímos um conjunto envoltório de $G\overline{G}$ de ordem 3. Mostramos primeiro a existência de três vértices que são a base da nossa construção. Considere $d = \max\{deg_G(v) : v \in I\}$ e $y \in I$ tal que $deg_G(y) = d$.

**Afirmação 1.** Existem $x \in C \setminus N_G(y)$ e $y' \in N_G(x) \cap I$.

*Prova da Afirmação 1.* Suponha, por contradição, que não existe $x \in C \setminus N_G(y)$. Então, para todo $x \in C$, $x \in N_G(y)$. Isso implica que $C \cup \{y\}$ é uma clique de $G$. Se a partição *split* de $V(G)$ é única ou selecionada de acordo com a Observação 2.3(a), $C$ é a única clique máxima em $G$, então $C \cup \{y\}$ não pode ser uma clique em $G$, uma contradição. Por outro lado, pela Observação 2.3(b), $I$ é um conjunto independente máximo e existem duas ou mais cliques máximas em $G$. Seja $v \in I$ tal que $deg_G(v) = deg_G(y)$. Então, $C \cup \{v\}$ e $C \cup \{y\}$ são cliques máximas em $G$. Assim, temos que $\overline{I}$ é uma clique máxima em $\overline{G}$. Seja $\overline{w} \in \overline{C}$. Como $\bar{v}\bar{w}, \bar{w}\bar{y} \notin E(\overline{G})$, $(\overline{I} \setminus \{\overline{v}, \overline{y}\}) \cup \{\overline{w}\}$ não é uma clique máxima em $\overline{G}$. Logo $\overline{I}$ é a única clique máxima em $\overline{G}$. Então, selecionamos a partição *split* de $V(\overline{G})$ de acordo com a Observação 2.3(a) e obtemos que $\overline{y}$ e $\overline{y}'$ são componentes triviais de $\overline{G}'$, uma contradição, já que consideramos $t(\overline{G}') = 0$.

Como $t(G') = 0$ e $xy \notin E(G)$, $x$ não é um vértice isolado em $G'$, então existe $y' \in N_G(x) \cap I$. □

Seja $y \in I$ tal que $deg_G(y)$ é máximo, $x \in C \setminus N_G(y)$, e $y' \in N_G(x) \cap I$. A fim de evitar repetição de notação para as operações de união, intersecção e diferença simétrica nos conjuntos $N_G(y)$ e $N_G(y')$, escrevemos $U = N_G(y) \cup N_G(y')$, $A = N_G(y) \cap N_G(y')$, e $D = N_G(y) \triangle N_G(y')$, respectivamente.

Considere uma partição $R \cup L$ de $I \setminus \{y, y'\}$ tal que $R = \{v \in I \setminus \{y, y'\} : \forall u \in D,\ uv \in E(G)\}$ e $L = I \setminus (R \cup \{y, y'\})$. Além disso, seja $R_1 = \{v \in R : N_G(v) \cap (C \setminus U) \neq \emptyset\}$, e $R_2 = R \setminus R_1$. Em outras palavras, $R$ é o conjunto de vértices que ligam com todo vértice de $D$ e $R_1$ é o conjunto de vértices de $R$ que tem ao menos um vizinho em $C$ fora de $U$. Mostramos conjuntos envoltórios de $G\overline{G}$ considerando $R_1$ ser vazio ou não.

**Caso 1.** $R_1 = \emptyset$.

Seja $S = \{x, y, \overline{y}'\}$ (veja na Figura 6.7). Primeiro, temos que $N_G(y) \subseteq I[x, y]$, $y' \in I[x, \overline{y}']$ e $\overline{y} \in I[y, \overline{y}']$.

Sabemos que $xy' \in E(G)$ e $xy \notin E(G)$. Então, como $deg_G(y)$ é máximo, existe $z \in N_G(y)$ tal que $y'z \notin E(G)$. Assim $N_G(y') \subseteq I[y', z]$, o que implica em $U \subseteq H(S)$. Como $D \subseteq U \subseteq H(S)$, e $\bar{w}\bar{y} \in E(\overline{G})$, para todo $w \in N_G(y') \setminus A$, (resp. $\bar{w}'\bar{y}' \in E(\overline{G})$, para todo $w' \in N_G(y) \setminus A$), obtemos que $\overline{D} \subseteq I[D \cup \{\overline{y}, \overline{y}'\}]$.

Seja $v \in L$. Pela definição de $L$, existe $z \in D$ tal que $vz \notin E(G)$, o que implica que $\bar{v}\bar{z} \in E(\overline{G})$. Como $\bar{z}$ ou é adjacente a $\overline{y}$ ou a $\overline{y}'$, e, para todo $\overline{v} \in \overline{L}$, $\bar{v}\bar{y}, \bar{v}\bar{y}' \in E(\overline{G})$, segue que $\overline{v} \in I[\{\overline{y}, \overline{y}', \overline{z}\}]$. Logo $\overline{L} \subseteq H(S)$.

Agora, mostramos que $L \cup (N_G(L) \setminus U) \subseteq H(S)$.

Como $G'$ é conexo, existe um caminho mínimo $w_0 v_1 w_1 \ldots v_k w_k$ (ou $w_0 v_1 w_1 \ldots v_k$), com $k \geq 2$, em $G'$ entre $w_0 \in U$ e $w_k \in N_G(L) \setminus U$ (resp. $v_k \in L$), em que $v_i \in I$, $w_i \in C$, para todo $i \in [k]$.

Pela definição de $R_2$, nenhum vértice de $R_2$ é adjacente a algum vértice de $N_G(L) \setminus U$, então $w_0v_1w_1 \dots v_kw_k$ (resp. $w_0v_1w_1 \dots v_k$) não contém vértices de $R_2$.

Pela maximalidade de $deg_G(y)$ temos que $deg_G(v_i) < deg_G(y) + 1 = |N_G(y) \cup \{x\}|$, para todo $i \in [k]$. Logo, existe $z \in N_G(y) \cup \{x\}$ tal que $v_iz \notin E(G)$, para todo $i \in [k]$. Como $w_0, z \in U \subseteq H(S)$, e $\overline{v}_i \in \overline{I} \setminus \overline{R}_2 \subseteq H(S)$, para todo $i \in [k]$, segue da Proposição 6.17 que $w_k \in H(S)$ (resp. $v_k \in H(S)$). Consequentemente $L \cup (N_G(L) \setminus U) \subseteq H(S)$.

Resta mostrar que $R_2 \cup \overline{R}_2 \cup \overline{A} \cup \overline{N_G(L) \setminus U} \subseteq H(S)$.

Como $\overline{G}'$ é conexo, existe um caminho mínimo $\overline{w}_0\overline{v}_1\overline{w}_1 \dots \overline{v}_k\overline{w}_k$ (ou $\overline{w}_0\overline{v}_1\overline{w}_1 \dots \overline{v}_k$), com $k \geq 2$, em $\overline{G}'$ entre $\overline{w}_0 \in \overline{I} \setminus \overline{R}_2$ e $\overline{w}_k \in \overline{R}_2$ (resp. $\overline{v}_k \in \overline{A} \cup \overline{N_G(L) \setminus U}$), em que $\overline{v}_i \in \overline{C}$, e $\overline{w}_i \in \overline{I}$, para todo $i \in [k]$.

Mostramos que, para todo $i \in [k]$, existe $\overline{z} \in \overline{I} \setminus \overline{R}_2$ tal que $\overline{v}_i\overline{z} \notin E(\overline{G})$. Está claro que $\overline{z} = \overline{y}$ para todo $\overline{v}_i \in \overline{A}$, uma vez que $\overline{v}_i\overline{y} \notin E(\overline{G})$. Agora, seja $\overline{v}_i \in \overline{N_G(L) \setminus U}$. Sabemos que $N_G(R_2 \cup \{y, y'\}) \cap (N_G(L) \setminus U) = \emptyset$. Como $G'$ é conexo, existe $z \in L$ tal que $v_iz \in E(G)$, o que implica que $\overline{v}_i\overline{z} \notin E(\overline{G})$, com $\overline{z} \in \overline{L} \subseteq \overline{I} \setminus \overline{R}_2$.

Como $\overline{w}_0, \overline{z} \in \overline{I} \setminus \overline{R}_2 \subseteq H(S)$, e $v_i \in A \cup N_G(L) \subseteq H(S)$, para todo $i \in [k]$, a Proposição 6.17 (dual) implica que $\overline{w}_k \in H(S)$ (resp. $\overline{v}_k \in H(S)$). Logo, $\overline{R}_2 \cup \overline{A} \cup \overline{N_G(L) \setminus U} \subseteq H(S)$. Finalmente, como $D \cup \overline{R}_2 \subseteq H(S)$, obtemos que $R_2 \subseteq I[D \cup \overline{R}_2]$, o que completa a prova do Caso 1.

**Caso 2.** $R_1 \neq \emptyset$.

Sejam $y'' \in R_1$ tal que $N_G(y'') \setminus U$ é máximo, e $S = \{x, y, \overline{y}''\}$ (veja na Figura 6.8). Primeiro, temos que $N_G(y) \subseteq I[x, y]$, $y'' \in I[x, \overline{y}'']$, e $\overline{y} \in I[y, \overline{y}'']$. Como $deg_G(y)$ é máximo, $y''$ não é adjacente a todo vértice de $N_G(y) \cup \{x\}$, então $N_G(y'') \subseteq I[N_G(y) \cup \{x, y''\}]$.

Seja $x'' \in N_G(y'') \setminus U$. Como $x'' \in H(S)$, e $\overline{x}''\overline{y} \in E(\overline{G})$, obtemos que $\overline{x}'' \in I[x'', \overline{y}]$. Logo $\overline{N_G(y'') \setminus U} \subseteq H(S)$. Como $\overline{x}''\overline{y}' \in E(\overline{G})$, e $\overline{x}''\overline{y}'' \notin E(\overline{G})$, segue que $\overline{y}' \in I[\overline{x}'', \overline{y}'']$. Consequentemente $y' \in I[x, \overline{y}']$. Isso implica que $\overline{D} \in I[D \cup \{\overline{y}, \overline{y}'\}]$. Como $x''$ não é adjacente a nenhum vértice de $R_2$, temos que $\overline{x}''$ é adjacente a todo vértice de $\overline{R}_2$. Assim, $\overline{R}_2 \subseteq I[\overline{x}'', \overline{y}'']$. Então, $R_2 \subseteq I[D \cup \overline{R}_2]$.

Seja $v \in L$. Pela definição de $L$, existe $z \in D$ tal que $vz \notin E(G)$, o que implica que $\overline{v}\overline{z} \in E(\overline{G})$. Como $\overline{z}$ é adjacente ou a $\overline{y}$ ou a $\overline{y}'$, e, para todo $\overline{v} \in \overline{L}$, $\overline{v}\overline{y}, \overline{v}\overline{y}' \in E(\overline{G})$, segue que $\overline{v} \in I[\{\overline{y}, \overline{y}', \overline{z}\}]$. Logo $\overline{L} \subseteq H(S)$.

Consideramos $X \cup Y$ uma partição $R_1 \setminus \{y''\}$ tal que $X = \{v \in R_1 \setminus \{y''\} : \forall u \in (A \setminus N_G(y'')) \cup (N_G(y'') \setminus U),\ uv \in E(G)\}$, e $Y = R_1 \setminus (X \cup \{y''\})$.

Seja $a \in A \setminus N_G(y'')$. Como $\overline{a}\overline{y}'' \in E(\overline{G})$, obtemos que $\overline{a} \in I[a, \overline{y}'']$. Consequentemente $\overline{A \setminus N_G(y'')} \subseteq H(S)$. Seja $v \in Y$. Pela definição de $Y$, e como selecionamos $y'' \in R_1$ tal que $N_G(y'') \setminus U$ é máximo, existe $u \in (N_G(y'') \setminus U)$ tal que $uv \notin E(G)$, então $\overline{u}\overline{v} \in E(\overline{G})$. Como $\overline{u}\overline{y}'' \notin E(\overline{G})$, e $\overline{u} \in \overline{N_G(y'') \setminus U} \subseteq H(S)$, temos que $\overline{v} \in I[\overline{u}, \overline{y}'']$. Segue que $\overline{Y} \subseteq H(S)$, e $Y \subseteq I[D \cup \overline{Y}]$. Logo, $N_G(Y) \subseteq H(S)$.

Agora, mostramos que $L \cup (N_G(L) \setminus (N_G(Y \cup y'') \cup U)) \subseteq H(S)$.

Como $G'$ é conexo, existe um caminho mínimo $w_0v_1w_1\dots v_kw_k$ (ou $w_0v_1w_1\dots v_k$), com $k \geq 2$, em $G'$ entre $w_0 \in N_G(Y \cup y'') \cup U$ e $w_k \in N_G(L) \setminus (N_G(Y \cup y'') \cup U)$ (resp. $v_k \in L$), em que $v_i \in I$, $w_i \in C$, para todo $i \in [k]$.

Pela definição de $X$, nenhum vértice de $X$ é adjacente a algum vértice de $N_G(L) \setminus (N_G(Y \cup y'') \cup U)$, então $w_0v_1w_1\dots v_kw_k$ (resp. $w_0v_1w_1\dots v_k$) não contém vértices de $X$.

Pela maximalidade de $deg_G(y)$ temos que $deg_G(v_i) < deg_G(y) + 1 = |N_G(y) \cup \{x\}|$, para todo $i \in [k]$. Logo, existe $z \in N_G(y) \cup \{x\}$ tal que $v_iz \notin E(G)$, para todo $i \in [k]$. Como $w_0, z \in (N_G(Y \cup y'') \cup U) \subseteq H(S)$, e $\overline{v}_i \in \overline{I} \setminus \overline{X} \subseteq H(S)$, para todo $i \in [k]$, segue da Proposição 6.17 que $w_k \in H(S)$ (resp. $v_k \in H(S)$). Consequentemente $L \cup (N_G(L) \setminus (N_G(Y \cup y'') \cup U)) \subseteq H(S)$.

Similarmente ao Caso 1, como $\overline{G}'$ é conexo, a Proposição 6.17 (dual) pode ser utilizada para mostrar que $\overline{X} \cup \overline{A \cap N_G(y'')} \cup \overline{N_G(L) \setminus (N_G(Y \cup y'') \cup U)} \subseteq H(S)$. Como $\overline{X} \subseteq H(S)$, obtemos que $X \subseteq I[\overline{X} \cup U]$, portanto $H(S) = V(G\overline{G})$.

Em todos os casos temos que existe um conjunto envoltório de $G\overline{G}$ de ordem três, o que completa a prova. □

As Figuras 6.7 e 6.8 mostram exemplos de prismas complementares $G\overline{G}$ que ilustram os casos $R_1 = \emptyset$ e $R_1 \neq \emptyset$ do Teorema 6.18, respectivamente. Os vértices em preto representam o conjunto envoltório de cada prisma complementar.

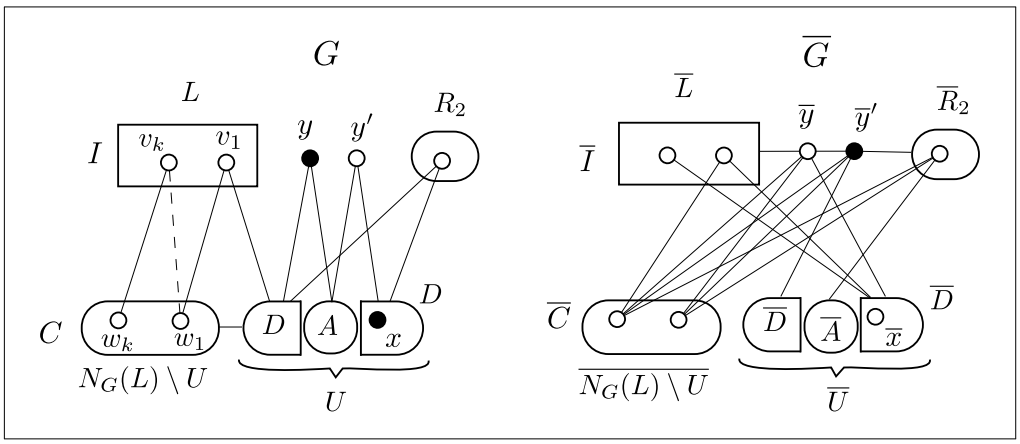



**Figura 6.7:** *Conjunto envoltório geodético que ilustra o Caso 1 do Teorema 6.18.*

Para o teorema a seguir vamos relembrar a definição de subgrafo isométrico. Dizemos que $H$ é um subgrafo *isométrico* de $G$ se $H$ é um subgrafo de $G$ tal que $d_H(u,v) = d_G(u,v)$ para todo par $u, v \in V(H)$.

**Teorema 6.19** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split autoconexo tal que $nt(G') = 1$, $nt(\overline{G}') = 1$, $t(G') = 1$ e $t(\overline{G}') = 1$. Então $h(G\overline{G}) \leq 3$.*

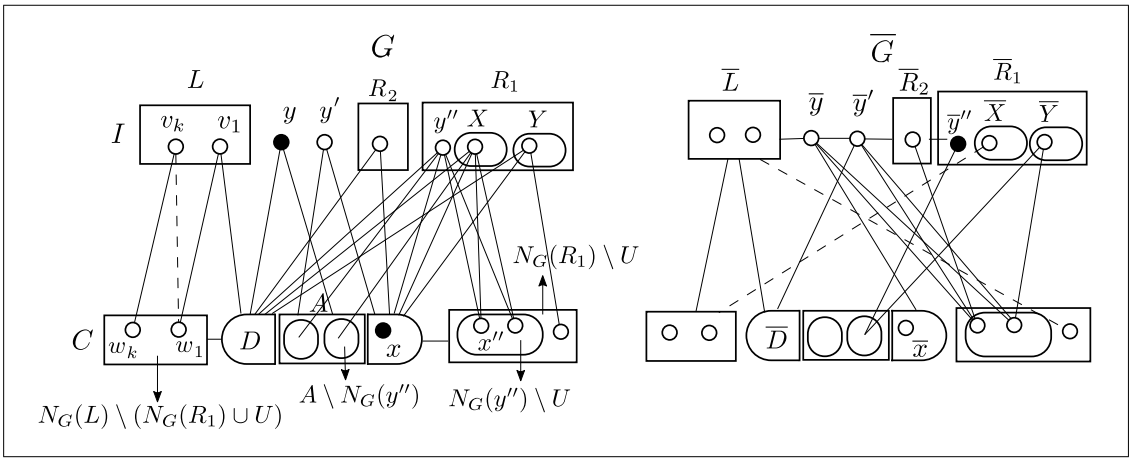



**Figura 6.8:** *Conjunto envoltório geodético que ilustra o Caso 2 do Teorema 6.18.*

*Prova*. Seja $v'$ o vértice da única componente trivial de $G'$. Seja $G_1$ o grafo induzido por $V(G) \setminus \{v'\}$. Mostraremos primeiro que $G_1\overline{G}_1$ é um subgrafo isométrico de $G\overline{G}$.

**Afirmação 1.** $G_1\overline{G}_1$ é um subgrafo isométrico de $G\overline{G}$.

*Prova da Afirmação 1.* Sejam $x,y \in V(G_1)$ (resp. $x,y \in V(\overline{G}_1)$). Como $v'$ (resp. $\overline{v}'$) é simplicial em $G$ (resp. $\overline{G}$) temos que qualquer caminho mínimo entre $x$ e $y$ em $V(G)$ (resp. $V(\overline{G})$) não contém $v'$ (resp. $\overline{v}'$). Desta forma, $d_{G_1}(x,y) = d_G(x,y)$ (resp. $d_{\overline{G}_1}(x,y) = d_{\overline{G}}(x,y)$). Agora, considere $x \in V(G_1)$ e $y \in V(\overline{G}_1)$. Como $d_{G_1\overline{G}_1}(x,y) = d_{G\overline{G}}(x,y) \leq 2$ concluímos que $G_1\overline{G}_1$ é um subgrafo isométrico de $G\overline{G}$. □

Como $G_1$ é um subgrafo de $G$ que satisfaz $nt(G'_1) = 1$, $nt(\overline{G}'_1) = 1$, $t(G'_1) = 0$ e $t(\overline{G}'_1) = 0$, procedemos de maneira similar à prova do Teorema 6.18. Considere $d = \max\{deg_G(w) : w \in I\}$ e $y \in I$ tal que $deg_G(y) = d$. Seja $x \in C \setminus (N_G(y) \cup \{v'\})$, e $y' \in N_G(x) \cap I$. A Afirmação 1 do Teorema 6.18 implica na existência de $x,y,y'$ em $V(G_1) \subseteq V(G)$.

Sejam $U = N_G(y) \cup N_G(y')$, $A = N_G(y) \cap N_G(y')$, e $D = N_G(y) \triangle N_G(y')$. Considere $R = \{v \in I \setminus \{y,y'\} : \forall u \in D,\ uv \in E(G)\}$, e $R_1 = \{v \in R : N_G(v) \cap (C \setminus U) \neq \emptyset\}$. Mostramos conjuntos envoltórios de $G\overline{G}$ considerando $R_1$ ser vazio ou não.

**Caso 1.** $R_1 = \emptyset$.

Seja $S = \{y,y',\overline{v}'\}$. Temos que $A = N_G(y) \cap N_G(y') \subseteq I[y,y']$. Como $nt(G') = 1$, temos que $d_G(y,y') < 3$, logo $A \neq \emptyset$. Como $v'$ é adjacente a todo vértice de $A$, obtemos que $v' \in I[A \cup \{\overline{v}'\}]$. Consequentemente $U = N_G(y) \cup N_G(y') \subseteq I[\{v',y,y'\}]$. Como $v'y, v'y' \notin E(G)$, $\overline{v}'\overline{y}, \overline{v}'\overline{y}' \in E(\overline{G})$, então $\overline{y},\overline{y}' \in I[\{y,y',\overline{v}'\}]$.

Até o momento, temos que $x,y,\overline{y}' \in H(S)$. Como $G_1$ é um subgrafo de $G$ com $nt(G'_1) = 1$, $nt(\overline{G}'_1) = 1$, $t(G'_1) = 0$ e $t(\overline{G}'_1) = 0$, o Teorema 6.18 (Caso 1) implica que $V(G_1) \cup V(\overline{G}_1) \subseteq H_{G_1\overline{G}_1}(\{x,y,\overline{y}'\})$. Como $G_1\overline{G}_1$ é um subgrafo isométrico de $G\overline{G}$, o lema 6.4 implica que $V(G_1) \cup V(\overline{G}_1) \subseteq H(\{x,y,\overline{y}'\})$, consequentemente $V(G\overline{G}) = H(S)$.

**Caso 2.** $R_1 \neq \emptyset$.

Seja $y'' \in R_1$ tal que $N_G(y'') \setminus U$ é máximo, e $S = \{y, y'', \overline{v}'\}$. Temos que $N_G(y) \cap N_G(y'') \subseteq I[y, y']$. Como $nt(G') = 1$, temos que $d_G(y, y') < 3$, logo $N_G(y) \cap N_G(y'') \neq \emptyset$. Seja $z \in N_G(y) \cap N_G(y'')$. Como $v'z \in E(G)$, temos que $v' \in I[z, \overline{v}']$ e segue que $N_G(y) \cup N_G(y'') \subseteq I[\{v, y, y''\}]$. Como $v'y, v'y'' \notin E(G)$, $\overline{v}'\overline{y}, \overline{v}'\overline{y}'' \in E(\overline{G})$, então $\overline{y}, \overline{y}'' \in I[\{y, y'', \overline{v}'\}]$.

Até aqui, temos que $x, y, \overline{y}'' \in H(S)$. Como $G_1$ é um subgrafo de $G$ com $nt(G_1') = 1$, $nt(\overline{G}_1') = 1$, $t(G_1') = 0$ e $t(\overline{G}_1') = 0$, o Caso 2 do Teorema 6.18 implica que $V(G_1) \cup V(\overline{G}_1) \subseteq H_{G_1\overline{G}_1}(\{x, y, \overline{y}''\})$. Como $G_1\overline{G}_1$ é um subgrafo isométrico de $G\overline{G}$, o Lema 6.4 implica que $V(G_1) \cup V(\overline{G}_1) \subseteq H(\{x, y, \overline{y}''\})$, consequentemente $V(G\overline{G}) = H(S)$.

Em todos os casos temos que $S$ é um conjunto envoltório of $G\overline{G}$, e o resultado $h(G\overline{G}) \leq 3$ segue. □

A partir do Teorema 6.19 obtemos o Corolário 6.20, a seguir.

**Corolário 6.20** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split autoconexo. Se $nt(G') = 1$, $nt(\overline{G}') = 1$, $t(G') = 1$ e $t(\overline{G}') = 1$, então $h(G\overline{G}) = 3$.*

*Prova*. Seja $v$ o vértice da componente trivial de $G'$. O limite superior segue pelo Teorema 6.19. Desta forma, resta mostrar o limite inferior $h(G\overline{G}) \geq 3$.

Como $v$ é simplicial em $G$, e $\overline{v}$ é simplicial em $\overline{G}$, o Lema 6.2 implica que $S \cap \{v, \overline{v}\} \neq \emptyset$. Seja $x \in \{v, \overline{v}\}$, e suponha, por contradição, que $S = \{u, x\}$ é um conjunto envoltório de $G\overline{G}$. Como $d_{G\overline{G}}(u, x) < 2$, para todo $u \in V(G\overline{G}) \setminus \{v, \overline{v}\}$, temos que $H(S) = N_{G\overline{G}}[u] \cap N_{G\overline{G}}[x]$. Isso implica que $H(S) \neq V(G\overline{G})$, uma contradição. Portanto, $h(G\overline{G}) \geq 3$. □

Nosso último resultado sobre o número envoltório geodético se encontra no Corolário 6.21. Consideramos grafos *split* $G$ com $diam(G) = diam(\overline{G}) = 2$. Se $nt(G') \geq 2$ ou $nt(\overline{G}') \geq 2$, então $diam(G) = 3$ ou $diam(\overline{G}) = 3$, o que não entra no caso atual. Se $t(G') \geq 2$ ou $t(\overline{G}') \geq 2$ recaímos no resultado do Teorema 6.15, logo $h(G\overline{G}) = max\{c(G'), c(\overline{G}')\}$. Desta forma, consideramos que $nt(G') = 1$, $nt(\overline{G}') = 1$, $t(G') \leq 1$ e $t(\overline{G}') \leq 1$.

**Corolário 6.21** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split com $diam(G) = 2$ e $diam(\overline{G}) = 2$. Se $max\{nt(G'), t(G'), nt(\overline{G}'), t(G')\} < 2$, então $h(G\overline{G}) = 3$.*

*Prova*. Segue diretamente do Teorema 6.7 e do Teorema 6.15. □

Para encerrar este capítulo, um resumo dos resultados obtidos segue na Tabela 6.1.

**Tabela 6.1:** *Sumário dos resultados sobre o número envoltório para o prisma complementar $G\overline{G}$ de $G$ autoconexo.*

| **Grafos** | **Número Envoltório Geodético** |
|---|---|
| $G$ não *split* | $h(G\overline{G}) \leq 3$ (Teorema 6.6). |
| $G$ não *split* com $diam(G) = 2$ e $diam(\overline{G}) = 2$ | $h(G\overline{G}) = 3$ (Corolário 6.8). |
| $G$ *split* com $diam(G) > 3$ | $h(G\overline{G}) = 2$ (Teorema 6.9). |
| $G$ *split* | $h(G\overline{G}) \geq max\{c(G'), c(\overline{G}'), 2\}$ (Teorema 6.12). |
| $G$ *split* com $nt(G') \geq 2$ ou $nt(\overline{G}') \geq 2$ ou $t(G') \geq 2$ ou $t(\overline{G}') \geq 2$ | $h(G\overline{G}) \leq max\{c(G'), c(\overline{G}')\}$. (Teorema 6.15). |
| $G$ *split* com $nt(G') \geq 2$ ou $nt(\overline{G}') \geq 2$ ou $t(G') \geq 2$ ou $t(\overline{G}') \geq 2$ | $h(G\overline{G}) = max\{c(G'), c(\overline{G}')\}$ (Corolário 6.16). |
| $G$ *split* com $nt(G') = 1$, $nt(\overline{G}') = 1$, $t(G') \leq 1$ e $t(\overline{G}') \leq 1$ | $h(G\overline{G}) \leq 3$ (Teoremas 6.18 e 6.19). |
| $G$ *split* com $nt(G') = 1$ e $t(G') = 1$ | $h(G\overline{G}) = 3$ (Corolário 6.20). |
| $G$ *split* com $diam(G) = 2$ e $diam(\overline{G}) = 2$ | $h(G\overline{G}) = max\{c(G'), c(\overline{G}')\}$, se $t(G') \geq 2$ ou $t(\overline{G}') \geq 2$ (Corolário 6.16); ou $h(G\overline{G}) = 3$, caso contrário. (Corolário 6.21). |

CAPÍTULO 7

# O Número Geodético para Prismas Complementares

Neste capítulo apresentamos nossos resultados sobre o número geodético para prismas complementares. Retomando brevemente a terminologia, considere um grafo $G$. O *intervalo fechado* entre dois vértices $u, v \in V(G)$, denotado por $I[u,v]$, consiste de $u, v$ juntamente com todos os vértices pertencentes a todo caminho mínimo entre $u$ e $v$. Se não existe um caminho entre $u$ e $v$, então $I[u,v] = \{u,v\}$. Assim, o intervalo fechado de $S \subseteq V(G)$, denotado por $I[S]$, é a união de todos os intervalos $I[u,v]$ para todo vértice $u, v \in S$. Quando necessário, adicionaremos um subscrito à notação de intervalo, por exemplo, $I_G[S]$, para indicar qual grafo $G$ está sendo considerado. Se $I[S] = V(G)$, dizemos que $S$ é um *conjunto geodético* de $G$. A cardinalidade $g(G)$ do menor conjunto geodético de $G$ é o *número de intervalo geodético* ou simplesmente *número geodético* de $G$.

Fazendo uma comparação com o parâmetro número envoltório abordado anteriormente no Capítulo 6, percebemos que, enquanto um conjunto envoltório é obtido permitindo-se várias iterações sucessivas da operação de intervalo fechado, um conjunto geodético é obtido pela aplicação desta mesma operação uma única vez.

O número geodético foi introduzido em 1993 por Harary, Loukakis e Tsouros [78]. Estes autores mostram resultados do número geodético para certas classes de grafos, como completos, bipartidos completos, árvores, ciclos, rodas e grades. Em 2002, Atici [5] prova que o problema de decisão relacionado ao número geodético é NP-completo. Este problema também é NP-completo para grafos bipartidos cordais [52] e grafos livres de $P_5$ [50]. Por outro lado, o número geodético pode ser determinado em tempo polinomial para cografos [52], grafos *split* [52] e grafos de intervalo próprio [63].

A respeito de prismas complementares, Duarte [60] mostra resultados do número geodético em prismas complementares de grafos completos, caminhos e ciclos. Motivados por este trabalho determinamos resultados do número geodético para prismas complementares de outras classes de grafos. Motivados também por Dourado et al. [52] mostramos que para um dado prisma complementar $G\overline{G}$ e um inteiro positivo $k$, é NP-completo decidir se $g(G\overline{G}) \leq k$. Estes resultados se encontram publicados em [21].

Chartrand, Harary e Zhang [34] observaram que cada vértice simplicial $v$ de um grafo $G$ ou é vértice inicial ou final de um caminho mínimo contendo $v$. Isso implica no seguinte lema.

**Lema 7.1 (Chartrand, Harary e Zhang [34])** *Todo conjunto geodético de um grafo contém seus vértices simpliciais.*

Assim como vértices simpliciais em um grafo $G$ pertencem a qualquer conjunto geodético de $G$, temos uma relação similar nos prismas complementares $G\overline{G}$. Mostramos no Lema 7.3 que se $v$ é um vértice simplicial em $G$, então qualquer conjunto geodético de $G\overline{G}$ deve conter $v$ ou $\overline{v}$. Para a prova deste lema, utilizamos a Proposição 7.2 que concerne a um vértice simplicial $v$ em $G$ e caminhos mínimos de tamanho dois em $G\overline{G}$.

**Proposição 7.2** *Seja $v$ um vértice simplicial em um grafo $G$. Para todo $x,y \in V(G\overline{G}) \setminus \{v,\overline{v}\}$, se $d_{G\overline{G}}(x,y) \leq 2$, então $v \notin I_{G\overline{G}}[x,y]$.*

*Prova.* Se $d_{G\overline{G}}(x,y) = 1$, $I_{G\overline{G}}[x,y] = \{x,y\}$ e a conclusão é clara. Suponha $d_{G\overline{G}}(x,y) = 2$. Neste caso, $I_{G\overline{G}}[x,y] = N_{G\overline{G}}[x] \cap N_{G\overline{G}}[y]$. Suponha que $v \in I_{G\overline{G}}[x,y]$. Assim, $v \in N_{G\overline{G}}[x]$ e $v \in N_{G\overline{G}}[y]$. Por outro lado, o único vértice de $\overline{G}$ que liga com $v$ é $\overline{v}$. Como $x,y \notin \{v,\overline{v}\}$, temos que $v \in N_{G\overline{G}}(x) \cap N_{G\overline{G}}(y)$. Como $v$ é simplicial, isto implica que $xy \in E(G)$, uma contradição. □

**Lema 7.3** *Seja $G$ um grafo e $S$ um conjunto geodético de $G\overline{G}$. Se $v$ é simplicial em $G$, então $S \cap \{v,\overline{v}\} \neq \emptyset$.*

*Prova.* Seja $S$ um conjunto geodético de $G\overline{G}$. Suponha que $v \in V(G)$ é simplicial em $G$. Por contradição, suponha que $S \cap \{v,\overline{v}\} = \emptyset$, isto é, $v,\overline{v} \notin S$. Mostraremos que qualquer caminho mínimo entre $x,y \in V(G\overline{G}) \setminus \{v,\overline{v}\}$ não contém $v$.

Se $d_{G\overline{G}}(x,y) \leq 2$, segue da Proposição 7.2. Logo podemos supor que $d_{G\overline{G}}(x,y) = 3$. Pela definição de prisma complementar, se $x \in V(G)$ e $y \in V(\overline{G})$, então $d_{G\overline{G}}(x,y) \leq 2$. Desta forma, consideramos $x,y \in V(G) \setminus \{v\}$ ou $\overline{x},\overline{y} \in V(\overline{G}) \setminus \{\overline{v}\}$.

Sejam $x,y \in V(G) \setminus \{v\}$. Neste caso, se $d_G(x,y) = 3$, temos que $I_{G\overline{G}}[x,y] = \{\overline{x},\overline{y}\} \cup I_G[x,y]$. Como $N_G(v)$ é uma clique, nenhum caminho mínimo entre $x$ e $y$ em $G$ contém $v$, logo $v \notin I_{G\overline{G}}[x,y]$. Se $d_G(x,y) > 3$, temos que $I_{G\overline{G}}[x,y] = \{x,\overline{x},y,\overline{y}\}$ e a conclusão é clara. Sejam $\overline{x},\overline{y} \in V(\overline{G}) \setminus \{\overline{v}\}$. Se $\overline{x}\overline{y} \in E(\overline{G})$, então $I_{G\overline{G}}[\overline{x},\overline{y}] = \{\overline{x},\overline{y}\}$. Assim, considere que $\overline{x}\overline{y} \notin E(\overline{G})$. Como $I_{G\overline{G}}[\overline{x},\overline{y}] \cap V(G) = \{x,y\}$ e $x,y \notin \{v,\overline{v}\}$, temos a conclusão.

□

Seja $G$ um grafo. Denotamos por $\sigma(G)$ o conjunto de vértices simpliciais de $G$. Vimos no Lema 7.3 que um conjunto geodético de um grafo $G\overline{G}$ deve conter todos

os vértices de $\sigma(G)$ ou $\overline{\sigma(G)}$. Isso implica no limite inferior descrito no Teorema 7.4. Recorde que $\overline{\sigma(G)}$ é o conjunto de vértices correspondentes de $\sigma(G)$ em $V(\overline{G})$ e $\sigma(\overline{G})$ é o conjunto de vértices simpliciais de $\overline{G}$.

**Teorema 7.4** *Seja $G$ um grafo. Então $g(G\overline{G}) \geq |\overline{\sigma(G)} \cup \sigma(\overline{G})|$.*

*Prova*. Pelo Lema 7.3 temos que $g(G\overline{G}) \geq |\sigma(G)|$ e $g(G\overline{G}) \geq |\sigma(\overline{G})|$. Isso implica diretamente em $g(G\overline{G}) \geq |\overline{\sigma(G)} \cup \sigma(\overline{G})|$. □

Seja $G$ um grafo *split* com clique $C$ e conjunto independente $I$. Os grafos *split* tem a particularidade de que cada vértice de $I$ é um vértice simplicial. Desta forma, para um conjunto independente máximo $I$, temos que $\sigma(G) = I$. Como $C$ é clique em $G$, temos que $\overline{C}$ é conjunto independente em $\overline{G}$. Assim $\overline{C} \subseteq \sigma(\overline{G})$. A partir destas observações podemos determinar a igualdade correspondente ao número geodético em prismas complementares de grafos *split*.

**Teorema 7.5** *Seja $G = (C \cup I, E)$ um grafo split. Então $g(G\overline{G}) = |V(G)|$.*

*Prova*. Considere $G = (C \cup I, E)$ um grafo *split* com conjunto independente máximo $I$. Sabemos que $\sigma(G) = I$. Como $C$ é clique em $G$, temos que $\overline{C}$ é conjunto independente em $\overline{G}$. Assim $\overline{C} \subseteq \sigma(\overline{G})$. Pelo Lema 7.3 temos o limite inferior $g(G\overline{G}) \geq |\overline{\sigma(G)} \cup \sigma(\overline{G})| \geq |\overline{I}| + |\overline{C}| = |V(G)|$.

Para o limite superior $g(G\overline{G}) \leq |V(G)|$, mostramos conjuntos geodéticos no caso de $G$ ser conexo ou não.

Primeiro, considere $G$ desconexo e $S = V(G)$. Sejam $G_1, \ldots, G_k$ as componentes de $G$, para algum $k > 1$. Como $G$ é desconexo, para todo $u \in V(G_i)$ e $v \in V(G_j)$, para todo $i, j \in [k]$, $i \neq j$, temos que $u\bar{u}\bar{v}v$ é um caminho mínimo entre $u$ e $v$. Então $V(\overline{G}) \subseteq I[S]$.

Agora, considere $G$ e $\overline{G}$ conexos. Seja $S = C \cup \overline{I}$. Para todo $y \in I$, existe $v \in C$ tal que $vy \in E(G)$. Como $v, \overline{y} \in S$, temos que $y \in I[v, \overline{y}]$. Similarmente, para todo $\overline{v} \in \overline{C}$, existe $\overline{y} \in \overline{I}$ tal que $\overline{v}\overline{y} \in E(\overline{G})$. Como $v, \overline{y} \in S$, temos que $\overline{v} \in I[v, \overline{y}]$. Portanto $I[S] = V(G\overline{G})$. □

A seguir, mostramos um resultado de complexidade sobre o número geodético para prismas complementares. Primeiro, definimos os dois problemas de decisão considerados: CONJUNTO DOMINANTE e CONJUNTO GEODÉTICO. Um conjunto de vértices $D$ de um grafo $G$ é *dominante* se todo vértice de $V(G) \setminus D$ tem um vizinho em $D$.

**Problema 7.6** CONJUNTO DOMINANTE *[72]*.
***Instância:*** *Um grafo $G$ e um inteiro positivo $k$.*
***Pergunta:*** *$G$ possui um conjunto dominante de ordem no máximo $k$?*

**Problema 7.7** CONJUNTO GEODÉTICO *[5].*
***Instância:*** *Um grafo $G$ e um inteiro positivo $k$.*
***Pergunta:*** *$G$ possui um conjunto geodético de ordem no máximo $k$?*

Apenas relembrando, um grafo bipartido é *bipartido cordal* se ele não contém um ciclo induzido de tamanho pelo menos 6. Observamos que a construção de Dourado et al. [52], para mostrar a NP-completude do número geodético para grafos bipartidos cordais pode ser adaptada para mostrar que CONJUNTO GEODÉTICO é NP-completo mesmo restrito para prismas complementares. Este resultado segue no Teorema 7.8.

**Teorema 7.8** CONJUNTO GEODÉTICO *é* NP*-completo para prismas complementares.*

*Prova*. Desde que o intervalo de um conjunto de vértices pode ser computado em tempo polinomial, CONJUNTO GEODÉTICO está em NP.

Para provar a NP-completude, descrevemos uma redução polinomial do problema CONJUNTO DOMINANTE restrito a grafos bipartidos cordais, que é NP-completo [88]. Seja $(G,k)$ uma instância de CONJUNTO DOMINANTE tal que $G$ é bipartido cordal. Dourado et al. [52] criam um grafo $G'$ a partir de $G$ como segue. Sejam $A$ e $B$ as partições de $V(G)$. Adicione quatro novos vértices $a_1,a_2,b_1,b_2$. Seja $A' = A \cup \{a_1,a_2\}$ e $B' = B \cup \{b_1,b_2\}$. Adicione novas arestas $a_1b$ para todo $b \in B'$ e $b_1a$ para todo $a \in A'$.

Seja $H$ o grafo formado a partir da união disjunta de $G'$ com o grafo completo com três vértices $u_1,u_2$ e $u_3$. Seja $V_1 = \{u_1,u_2,u_3\}$.

Provamos que $G$ tem um conjunto dominante de ordem no máximo $k$ se e somente se $H\overline{H}$ tem um conjunto geodético de ordem no máximo $k+5$.

Primeiro, suponha que $G$ tem um conjunto dominante $D$ com $|D| \leq k$. Seja $S \subseteq V(H\overline{H})$ tal que $S = D \cup \{a_2,b_2,\overline{u}_1,\overline{u}_2,u_3\}$. Mostramos que $S$ é um conjunto geodético de $H\overline{H}$.

Para todo $i \in [2]$, temos que $u_i \in I[u_3,\overline{u}_i]$. Para algum $v \in V(G') \cap S$, temos um caminho mínimo $v\bar{v}\overline{u}_3u_3$, então $\overline{u}_3 \in I[v,u_3]$.

Como $N_H(V_1) \cap V(G') = \emptyset$, todo vértice $\overline{v} \in V(\overline{G}')$ está em um caminho mínimo entre $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$, o que implica que $V(\overline{G}') \subseteq I[\overline{u}_1,\overline{u}_2]$.

Claramente, $a_1,b_1 \in I[a_2,b_2]$. Agora, seja $a \in A \setminus D$. Como $D$ é dominante, existe $b \in B \cap D$ tal que $ab \in E(G)$. Como $a_2b_1ab$ e $a_2\overline{a}_2\overline{b}b$ são caminhos mínimos entre $a_2$ e $b$ em $H\overline{H}$, $a \in I[a_2,b] \subseteq I[S]$. Por simetria, $S$ é um conjunto geodético de $H\overline{H}$, e $g(H\overline{H}) \leq |S| = k+5$.

Reciprocamente, seja $S$ um conjunto geodético de $H\overline{H}$ com $|S| \leq k+5$. Como $V_1 \cup \{a_2,b_2\} \subseteq \sigma(H)$, o Lema 7.3 implica que $S \cap \{u_i,\overline{u}_i\} \neq \emptyset$, para todo $i \in [3]$, $S \cap \{a_2,\overline{a}_2\} \neq \emptyset$, e $S \cap \{b_2,\overline{b}_2\} \neq \emptyset$. Consequentemente, $|S| \geq 5$. Isso implica que $F = (S \cap (V(G) \cup V(\overline{G}) \cup \{a_1,b_1,\overline{a}_1,\overline{b}_1\})) \cup \{a_2,b_2,\overline{u}_1,\overline{u}_2,u_3\}$ é um conjunto geodético de $H\overline{H}$ com $|F| \leq k+5$.

Como todo vértice em $V(\overline{G}')$ (resp. $\{a_1, b_1\}$) está em um caminho mínimo entre $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$ (resp. $a_2$ e $b_2$), se $F$ contém um vértice $\overline{v}$ em $V(\overline{G}')$ (resp. $\{a_1, b_1\}$), então $(F \setminus \{\overline{v}\}) \cup \{w\}$, para algum $w \in V(G)$, é um conjunto geodético de $H\overline{H}$ de ordem no máximo $k+5$. Assim, podemos assumir que $F \cap (V(\overline{G}') \cup \{a_1, b_1\}) = \emptyset$. Logo $|F \cap V(G)| \leq k$. Seja $D = F \cap V(G)$. Mostramos que $D$ é um conjunto dominante de $G$.

Seja $a \in A \setminus D$. Como $F$ é um conjunto geodético de $H\overline{H}$, ou existe $b \in B \cap D$, tal que $a \in I[b, a_2]$, ou existe $b \in B \cap D$ e $v \in D$, com $a \in I[b, v]$. Em ambos os casos, existe $b \in D$ tal que $ab \in E(G)$. Logo, por simetria, $D$ é um conjunto dominante de $G$, o que completa a prova. □

A Figura 7.1 contém uma ilustração do grafo $H\overline{H}$ construído para a redução do Teorema 7.8. Em preto estão representados os vértices que pertencem ao conjunto geodético $S$ mas que não estão em $V(G)$.

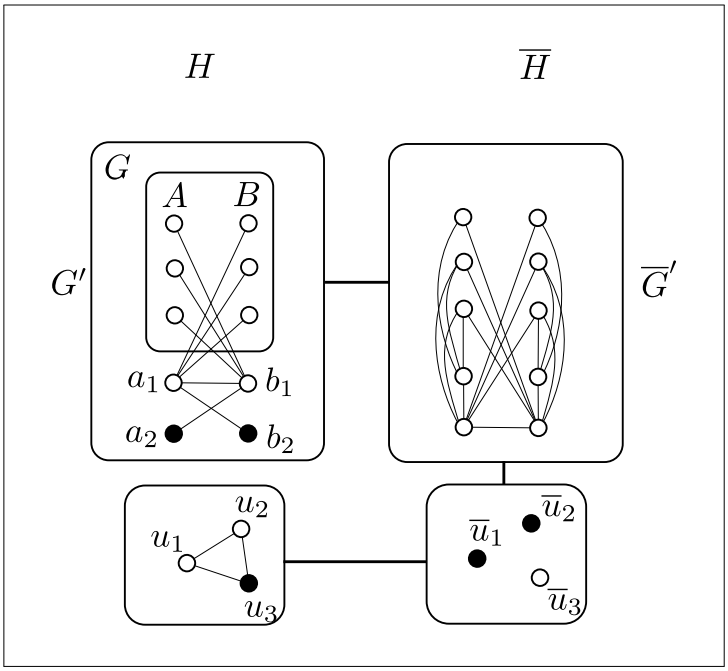



**Figura 7.1:** *Grafo $H\overline{H}$ construído para o Teorema 7.8.*

Embora tenhamos observado o resultado de complexidade do número geodético para prismas complementares $G\overline{G}$, mesmo restrito a $G$ desconexo, encerramos este capítulo com dois limitantes superiores naturais deste parâmetro. O primeiro se encontra no Teorema 7.9 onde consideramos $G$ desconexo e o segundo, expresso no Teorema 7.10, se refere a $G$ autoconexo com diâmetro restrito.

**Teorema 7.9** *Seja $G$ um grafo desconexo de ordem $n$. Então, $g(G\overline{G}) \leq n$.*

*Prova.* Sejam $G_1, \ldots, G_k$, com $k \geq 2$, as componentes conexas de $G$. Um $(u, v)$-caminho mínimo em $G\overline{G}$ entre $u \in V(G_i)$, para todo $i \in [k]$, e $v \in V(G_j)$, para todo $j \in [k] \setminus \{i\}$

contém seus vértices correspondentes $\overline{u}, \overline{v}$. Desta forma $I_{G\overline{G}}[V(G)] = V(G\overline{G})$. Portanto $V(G)$ é um conjunto geodético de $G\overline{G}$ e $g(G\overline{G}) \leq n$. □

**Teorema 7.10** *Seja $G$ um grafo autoconexo. Se $diam(G) \leq 3$ e $diam(\overline{G}) \leq 3$, então $g(G\overline{G}) \leq g(G) + g(\overline{G})$.*

*Prova*. Sejam $S_1$ e $S_2$ conjuntos geodéticos mínimos de $G$ e $\overline{G}$, respectivamente. Defina $S = S_1 \cup S_2$. Como $diam(G) \leq 3$, para todo $v \in I_G[V(G)]$ temos que $v \in I_{G\overline{G}}[V(G)]$. O mesmo acontece em $V(\overline{G})$, como $diam(\overline{G}) \leq 3$, para todo $\overline{v} \in I_{\overline{G}}[V(\overline{G})]$ temos que $\overline{v} \in I_{G\overline{G}}[V(\overline{G})]$. Isso implica que $V(G) \subseteq I_{G\overline{G}}[S_1]$ e $V(\overline{G}) \subseteq I_{G\overline{G}}[S_2]$. Portanto $S$ é um conjunto geodético de $G\overline{G}$ e segue que $g(G\overline{G}) \leq g(G) + g(\overline{G})$. □

Antes de encerrarmos este capítulo, veja na Tabela 7.1 um resumo dos nossos resultados obtidos.

**Tabela 7.1:** *Sumário dos resultados do número geodético para prismas complementares $G\overline{G}$.*

| **Grafos** | **Número Geodético** |
|---|---|
| $G$ qualquer | $g(G\overline{G}) \geq \lvert\overline{\sigma(G)} \cup \sigma(\overline{G})\rvert$ (Teorema 7.4) |
| $G$ *split* | $g(G\overline{G}) = \lvert V(G)\rvert$ (Teorema 7.5) |
| Complexidade | NP-completo (Teorema 7.8) |
| $G$ desconexo | $g(G\overline{G}) \leq \lvert V(G)\rvert$ (Teorema 7.9) |
| $G$ autoconexo | $g(G\overline{G}) \leq g(G) + g(\overline{G})$ (Teorema 7.10) |

CAPÍTULO 8

# O Número de Convexidade Geodética para Prismas Complementares

Este capítulo abrange nossos resultados obtidos a respeito do número de convexidade geodética. Resgatando aqui, um conjunto de vértices de um grafo $G$ é *convexo* se todo vértice de todo caminho mínimo entre dois vértices de $S$ está em $S$. A cardinalidade $con(G)$ do maior conjunto convexo geodético próprio de $G$ é o *número de convexidade geodética* de $G$.

Um dos primeiros trabalhos a introduzir o número de convexidade geodética foi publicado por Chartrand, Wall, e Zhang [35], em 2002. No trabalho destes autores é determinado o número de convexidade geodética para caminhos, árvores, ciclos, grafos completos, bipartidos completos, e grafos com vértices simpliciais e são apresentados limites superiores e inferiores deste parâmetro para grafos gerais. No mesmo ano, Canoy e Garces [17] mostram resultados sobre o número de convexidade geodética para operações entre dois grafos como junção, composição e produto Cartesiano. Mais tarde, Kim [84] estuda o número de convexidade para grafos $k$-regulares. Sobre aspectos de complexidade, em 2003, Gimbel [73] mostra que determinar o número de convexidade é NP-difícil para grafos gerais, enquanto que, em 2012, Dourado et al. [53] refina o resultado de Gimbel mostrando a NP-completude do problema de decisão do número de convexidade mesmo restrito para grafos bipartidos.

Não foram encontrados estudos na literatura a respeito deste parâmetro para prismas complementares. Então, estudamos este parâmetro para $G\overline{G}$ quando $G$ é desconexo, obtendo uma igualdade e, motivados por Dourado et al. [53], mostramos que o problema de decisão relativo ao número de convexidade é NP-completo restrito aos prismas complementares. Estes resultados se encontram publicados em [20].

Primeiro, apresentamos um limite inferior do número de convexidade de $G\overline{G}$ quando $diam(G) \leq 2$ ou $diam(G) \geq 4$, expresso no Lema 8.1. Logo após, apresentamos um limite superior quando $G$ é um grafo *split* autoconexo, que segue no Lema 8.2.

**Lema 8.1** *Seja $G$ um grafo de ordem $n$. Se $diam(G) \neq 3$, então $con(G\overline{G}) \geq n$.*

*Prova*. Considere primeiro que $diam(G) \leq 2$. Seja $u, v \in V(G)$. Como $diam(G) \leq 2$, e todo $(u,v)$-caminho passando por $V(\overline{G})$ tem tamanho pelo menos 3, obtemos que $I_{G\overline{G}}[u,v] \cap V(\overline{G}) = \emptyset$. Logo $V(G)$ é um conjunto convexo de $G\overline{G}$. Como $V(G) \subset V(G\overline{G})$, segue que $con(G\overline{G}) \geq |V(G)| = n$.

Agora, seja $diam(G) \geq 4$. De acordo com Goddard e Oellermann [74], $diam(G) > 3$ implica que $diam(\overline{G}) \leq 2$. Como $G\overline{G}$ é isomorfo a $\overline{G}G$, o resultado segue diretamente do caso acima. □

**Lema 8.2** *Seja $G$ um grafo split autoconexo de ordem $n$, e $\ell$ a ordem do menor conjunto $L(G_i)$, para todo $i \in [c(G')]$. Então $con(G\overline{G}) \leq 2n - \ell$.*

*Prova*. A partir do Lema 6.11, sabemos que $V(G\overline{G}) \setminus L(G_i)$ é convexo em $G\overline{G}$, para todo $i \in [c(G')]$. Então o resultado segue imediatamente da escolha do menor $L(G_i)$, dentre todo $i \in [c(G')]$, digamos $|L(G_i)| = \ell$. Portanto, $con(G\overline{G}) \leq 2n - \ell$. □

Agora, em direção ao nosso resultado sobre grafos desconexos, primeiro enunciamos o Lema 8.3 de Chartrand, Wall, e Zhang. Em seguida, apresentamos o Lema 8.4 que será útil para o desenvolvimento dos resultados subsequentes.

**Lema 8.3 (Chartrand, Wall, e Zhang [35])** *Seja $G$ um grafo conexo de ordem $n$. Então $con(G) = n - 1$ se e somente se $G$ contém um vértice simplicial.*

Seja $G$ um grafo desconexo. Se $G$ contém uma componente conexa trivial, o único vértice desta componente é um vértice simplicial. Isso implica que $con(G\overline{G}) = n - 1$, pelo Lema 8.3. Assim sendo, nos resultados posteriores desconsideramos grafos desconexos $G$ que possuam componentes conexas triviais.

**Lema 8.4** *Seja $G$ um grafo desconexo sem componentes conexas triviais. Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são vértices não adjacentes em $\overline{G}$, então $H_{G\overline{G}}(\{\bar{x},\bar{y}\}) = V(\overline{G})$.*

*Prova*. Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in V(\overline{G})$ tais que $\bar{x}\bar{y} \notin E(\overline{G})$. Considere $G_1, \ldots, G_\ell$ as componentes conexas de $G$. Temos que todo vértice em $V(\overline{G}_i)$ é adjacente a todo vértice de $V(\overline{G}_j)$, para todo $i, j \in [\ell]$, $i \neq j$. Isso implica que $\bar{x}, \bar{y} \in V(\overline{G}_i)$, para algum $i \in [\ell]$, e $V(\overline{G}) \setminus V(\overline{G}_i) \subseteq I_{G\overline{G}}[\bar{x},\bar{y}]$. Como $G$ não possui componentes triviais, sabemos que $|V(G_k)| \geq 2$, para todo $k \in [\ell]$. Seja $j \in [\ell] \setminus \{i\}$. Como a componente $G_j$ é conexa e $|V(G_j)| \geq 2$, existem $u, v \in V(G_j)$ tais que $uv \in E(G)$. Assim, $\bar{u}\bar{v} \notin E(\overline{G})$ e como $\bar{u}, \bar{v} \in I_{G\overline{G}}[\bar{x},\bar{y}]$, temos que $V(\overline{G}_i) \subseteq I_{G\overline{G}}[\bar{u},\bar{v}]$. Logo, $V(\overline{G}) \subseteq I^2_{G\overline{G}}[\bar{x},\bar{y}] = H_{G\overline{G}}(\{\bar{x},\bar{y}\})$. □

Mostramos a seguir, no Teorema 8.5, que o número de convexidade de $G\overline{G}$ quando $G$ é um grafo desconexo tem uma relação direta com a ordem da menor componente conexa de $G$.

**Teorema 8.5** *Sejam $G$ um grafo desconexo de ordem $n$ e $k$ a ordem da menor componente de $G$. Então, $con(G\overline{G}) = 2n-k$.*

*Prova*. Sejam $G_1,\ldots,G_\ell$ as componentes conexas de $G$, para $\ell \geq 2$. Se $k = 1$, o resultado segue do Lema 8.3. Desta forma, considere que $|V(G_i)| \geq 2$, para todo $i \in [\ell]$. Podemos ordenar as componentes $G_1,\ldots,G_\ell$ de $G$ em ordem não decrescente de seus números de vértices. Então, $G_1$ é uma componente de menor ordem, digamos $|V(G_1)| = k$. Seja $S = V(G\overline{G}) \setminus V(G_1)$. Veja a Figura 8.1 para um exemplo. Mostramos que $S$ é um conjunto convexo de $G\overline{G}$.

Sejam $x,y \in V(G) \setminus V(G_1)$ e $P$ um caminho entre $x$ e $y$ que passe por $V(G_1)$. Temos que $P$ tem tamanho pelo menos 7. Uma vez que $diam(G\overline{G}) = 3$, $P$ não é um caminho mínimo. Desta forma, $I_{G\overline{G}}[x,y] \cap V(G_1) = \emptyset$.

Sejam $x \in V(G) \setminus V(G_1)$, e $\overline{y} \in V(\overline{G})$ (resp. $\overline{x},\overline{y} \in V(\overline{G})$). Temos que um caminho mínimo entre $x$ e $\overline{y}$ (resp. $\overline{x}$ e $\overline{y}$) tem tamanho no máximo 2. Logo $I_{G\overline{G}}[x,\overline{y}] \cap V(G_1) = \emptyset$ (resp. $I_{G\overline{G}}[\overline{x},\overline{y}] \cap V(G_1) = \emptyset$). Portanto $S$ é um conjunto convexo de $G\overline{G}$.

A seguir, mostramos que $S$ é máximo. Por contradição, suponha que existe um conjunto convexo próprio $S' \subset V(G\overline{G})$ tal que $|S'| > |S|$.

Como $|S'| > 2n-k$, temos que $S' \cap V(G_j) \neq \emptyset$, e $S' \cap V(\overline{G}_j) \neq \emptyset$, para todo $j \in [\ell]$. Dividimos a prova em dois casos, considerando que $S' \cap V(\overline{G})$ contém dois vértices não adjacentes ou $S' \cap V(\overline{G})$ é uma clique.

**Caso 1.** *Existem $\overline{x},\overline{y} \in (S' \cap V(\overline{G}))$ tais que $\overline{x}\overline{y} \notin E(\overline{G})$.*

Pelo Lema 8.4, $H_{G\overline{G}}(\{\overline{x},\overline{y}\}) = V(\overline{G})$. Como $S'$ é convexo, então $S' \cap V(\overline{G}) = V(\overline{G})$. Como $S' \cap V(G_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in [\ell]$, e $G_i$ é uma componente conexa de $G$, a Proposição 6.5 implica que $V(G) \subseteq H_{G\overline{G}}(S')$. Logo, $S' = V(G\overline{G})$, uma contradição pois supomos que $S'$ é um conjunto convexo próprio de $G\overline{G}$.

**Caso 2.** *Para todo $\overline{x},\overline{y} \in (S' \cap V(\overline{G}))$, $\overline{x}\overline{y} \in E(\overline{G})$.*

Podemos considerar que $S' \cap V(\overline{G})$ é máximo. Seja $\overline{C}_i = S' \cap V(\overline{G}_i)$, para todo $i \in [\ell]$. sabemos que $C_i$ é um conjunto independente, e $\overline{C}_i$ é uma clique. Afirmamos que $S' \cap (N_G(C_i) \cup \overline{N_G(C_i)}) = \emptyset$, para todo $i \in [\ell]$. Na verdade, vamos provar uma afirmação ainda mais forte, $S' \cap (V(G_i\overline{G}_i) \setminus (C_i \cup \overline{C}_i)) = \emptyset$, para todo $i \in [\ell]$.

**Afirmação 1.** *Para todo $i \in [\ell]$, $S' \cap (V(G_i\overline{G}_i) \setminus (C_i \cup \overline{C}_i)) = \emptyset$.*

*Prova da Afirmação 1.* Primeiro, lembramos que $\overline{u},\overline{v} \in I_{G\overline{G}}[u,v]$, para todo $u \in V(G_i)$ e $v \in V(G_j)$, para todo $i,j \in [\ell]$, $i \neq j$. Seja $i \in [\ell]$. Por contradição, suponha que existe $v \in S' \cap (V(G_i\overline{G}_i) \setminus (C_i \cup \overline{C}_i))$.

Como $\overline{C}_i$ é máximo, se $v \in S' \cap (V(\overline{G}_i) \setminus \overline{C}_i)$, então $S' \cap V(\overline{G})$ contém dois vértices não adjacentes, uma contradição. Então, suponha que $v \in S' \cap (V(G_i) \setminus C_i)$. Como $S' \cap V(G_j) \neq \emptyset$, para todo $j \in [\ell]$, temos que $\overline{v} \in I_{G\overline{G}}[u,v]$, para algum $u \in S' \cap V(G_j)$, $i \neq j$. Como $\overline{C}_i$ é máximo, existe $\overline{w} \in \overline{C}_i$ tal que $\overline{v}\overline{w} \notin E(\overline{G})$. Consequentemente $S' \cap V(\overline{G})$ contém dois vértices não adjacentes, uma contradição. □

**Afirmação 2.** *Para todo $i \in [\ell]$, $|C_i \cap S'| \leq |V(G_i) \setminus C_i|$.*

*Prova da Afirmação 2.* Seja $i \in [\ell]$. Pela Afirmação 1, $S' \cap (V(G_i) \setminus C_i) = \emptyset$. Como $S' \cap V(G_i) \neq \emptyset$, temos que $|C_i \cap S'| \geq 1$. Por contradição, suponha que $|C_i \cap S'| > |V(G_i) \setminus C_i|$. Seja $|C_i \cap S'| = p$.

Se $p = 1$, então $|V(G_i) \setminus C_i| = 0$. Desde que $C_i$ é um conjunto independente, isso implica que que $G_i$ é desconexo, uma contradição. Então, considere $p \geq 2$. Sejam $C_i \cap S' = \{u_1, \ldots, u_p\}$ e $V(G_i) \setminus C_i = \{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$.

Como $C_i$ é um conjunto independente e $G_i$ é conexo, segue que todo vértice de $C_i \cap S'$ é adjacente a pelo menos um vértice de $V(G_i) \setminus C_i$. Como $|C_i \cap S'| > |V(G_i) \setminus C_i|$, temos que existem $j, j' \in [p]$, $j \neq j'$, tais que $u_j v_q, u_{j'} v_q \in E(G)$, para algum $q \in [p-1]$. Então, $v_q \in I_{G\overline{G}}[u_j, u_{j'}]$. Desde que $S'$ é convexo, $v_q \in S'$. Mas isso é uma contradição, já que $S' \cap (V(G_i) \setminus C_i) = \emptyset$.

□

Para concluir a prova, mostraremos que $|S'| \leq n$. De posse das afirmações acima, segue, para todo $i \in [\ell]$, que

$$\begin{aligned}
|S' \cap V(G_i \overline{G}_i)| &= |S' \cap V(G_i)| + |S' \cap V(\overline{G}_i)| \\
&= |C_i \cap S'| + |\overline{C}_i| \\
&= |C_i \cap S'| + |V(\overline{G}_i)| - |V(\overline{G}_i) \setminus \overline{C}_i| \\
&\leq |V(G_i) \setminus C_i| + |V(\overline{G}_i)| - |V(\overline{G}_i) \setminus \overline{C}_i| \qquad \text{(pela Afirmação 2)} \\
&= |V(G_i)|.
\end{aligned}$$

Como $|S' \cap V(G_i \overline{G}_i)| \leq |V(G_i)|$, para todo $i \in [\ell]$, obtemos que $|S'| \leq \sum_{i=1}^{\ell} |V(G_i)| = n$, uma contradição. Portanto $S$ é um conjunto convexo máximo de $G\overline{G}$, e $con(G\overline{G}) \leq 2n - k$, o que completa a prova. □

A Figura 8.1 mostra uma ilustração de um conjunto convexo próprio de $G\overline{G}$, expresso pelos vértices em preto. Consideramos $G_1$ a componente de menor ordem do grafo $G$.

Como uma consequência direta do Teorema 8.5 obtemos o seguinte resultado para cografos.

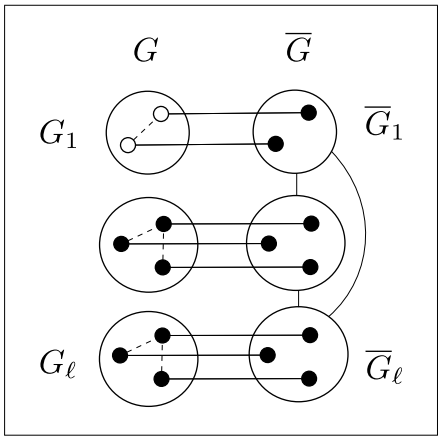



**Figura 8.1:** *Examplo de um conjunto convexo próprio de $G\overline{G}$.*

**Corolário 8.6** *Sejam $G$ um cografo conexo de ordem $n$ e $k$ a ordem da menor componente conexa de $\overline{G}$. Então, $con(G\overline{G}) = 2n-k$.*

*Prova*. Como um cografo $G$ é conexo se e somente se $\overline{G}$ é desconexo [44], e $G\overline{G}$ é isomorfo a $\overline{G}G$, o resultado segue do Teorema 8.5. □

A seguir, mostramos que determinar o número de convexidade pode ser difícil mesmo considerando os prismas complementares. Vamos primeiro apresentar uma proposição útil para o desenvolvimento deste resultado e definir os problemas de decisão CLIQUE e NÚMERO DE CONVEXIDADE.

**Proposição 8.7** *Sejam $G$ um grafo, $S$ um conjunto convexo de $G\overline{G}$ e $S' = S \cap V(\overline{G})$. Se $\overline{A} = N_{\overline{G}}(S') \setminus S'$, então $S \cap A = \emptyset$.*

*Prova*. Suponha, por contradição, que $u \in S \cap A$. Como $\bar{u}\bar{v} \in E(\overline{G})$, para algum $\bar{v} \in S'$, temos que $\bar{u} \in I_{G\overline{G}}[u,\bar{v}]$. Sabemos que $S$ é convexo, o que implica que $\bar{u} \in S$. Mas isso é uma contradição, já que $\bar{u} \notin S \cap V(\overline{G})$. □

**Problema 8.8** CLIQUE *[72].*
***Instância:*** *Um grafo $G$ e um inteiro positivo $k$.*
***Pergunta:*** *$G$ possui uma clique de ordem pelo menos $k$?*

**Problema 8.9** NÚMERO DE CONVEXIDADE *[53].*
***Instância:*** *Um grafo $G$ e um inteiro positivo $k$.*
***Pergunta:*** *$G$ possui um conjunto convexo próprio de ordem pelo menos $k$?*

**Teorema 8.10** NÚMERO DE CONVEXIDADE *é* NP*-completo mesmo restrito aos grafos prismas complementares.*

*Prova*. Uma vez que determinar o fecho convexo de um conjunto de vértices pode ser realizado em tempo polinomial, NÚMERO DE CONVEXIDADE está em NP.

A fim de provar a NP-completude, descrevemos uma redução polinomial do problema NP-completo CLIQUE [72] para o problema NÚMERO DE CONVEXIDADE restrito aos prismas complementares.

Seja $(G,k)$ uma instância de CLIQUE. Podemos assumir que $G$ é conexo, e $k \geq 3$. Seja $|V(G)| = n$. Construímos um grafo $H$ a partir de $G$ como segue. Adicione a $H$ três cliques $U$, $X$, e $Z$, com $n$, $4n$ e 2 vértices, respectivamente. Denote os vértices destes três conjuntos por $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $X = \{x_1, \ldots, x_{4n}\}$, e $Z = \{z_1, z_2\}$. Adicione a $H$ um conjunto independente $Y = \{y_1, y_2\}$. Adicione as demais arestas para conectar todo vértice de $U \cup Z$ a todo vértice de $V(G)$, todo vértice de $X$ a todo vértice de $U \cup Y$ e todo vértice de $U$ a todo vértice de $Y$. Isso completa a construção de $H$. A partir de $H$ crie o prisma complementar $H\overline{H}$. Veja um exemplo na Figura 8.2. Provamos que $G$ tem uma clique de ordem pelo menos $k$ se e somente se $H\overline{H}$ tem um conjunto convexo próprio de ordem pelo menos $k + 5n + 3$.

Primeiro, assumimos que $G$ tem uma clique $C$ de ordem pelo menos $k$. Seja $S \subseteq V(H\overline{H})$ tal que $S = C \cup U \cup X \cup Y \cup \{\overline{u}_1\}$. Note que $|S| = k + 5n + 3$. Mostramos que $S$ é um conjunto convexo de $H\overline{H}$.

Seja $w \in S \cap V(H)$. Como $d_{H\overline{H}}(w, \overline{u}_1) \leq 2$, temos que $I_{H\overline{H}}[w, \overline{u}_1] = \{w, \overline{u}_1\}$, se $w = u_1$, ou $I_{H\overline{H}}[w, \overline{u}_1] = \{w, u_1, \overline{u}_1\}$, caso contrário. Sejam $w, w' \in S \cap V(H)$. Como $d_H(w, w') \leq 2$ e $C$ é uma clique em $G$, temos que $I_{H\overline{H}}[w, w'] \subseteq S \cap V(H)$. Portanto $I_{H\overline{H}}[S] = S$, e $S$ é um conjunto convexo de $H\overline{H}$.

Reciprocamente, vamos primeiro recorrer a duas afirmações.

**Afirmação 1.** *Seja $S$ um conjunto convexo próprio de $H\overline{H}$. Então, para todo $w, w' \in S$, $d_{H\overline{H}}(w, w') \leq 2$.*

*Prova da Afirmação 1.* Por contradição, suponha que existem $w, w' \in S$ tais que $d_{H\overline{H}}(w, w') > 2$. Pela definição de prisma complementar, sabemos que ou $w, w' \in V(H)$ ou $w, w' \in V(\overline{H})$. Sejam $w, w' \in S \cap V(H)$. Pela construção de $H$, $d_H(X \cup Y, Z) = 3$, então podemos considerar que $w \in X \cup Y$ e $w' \in Z$. Desta forma, temos que $U \cup V(G) \cup \{\overline{w}, \overline{w}'\} \subseteq I_{H\overline{H}}[w, w']$. Como $\bar{w}\bar{v} \in E(\overline{H})$, para todo $v \in V(G)$, temos que $V(\overline{G}) \subseteq I^2_{H\overline{H}}[w, w']$, e, por simetria, $\overline{U} \subseteq I^2_{H\overline{H}}[w, w']$. Como $G$ é conexo, existem dois vértices não adjacentes $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V(\overline{G})$. Isso implica que $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq I_{H\overline{H}}[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$. Similarmente, como $\overline{U}$ é um conjunto independente, $\overline{Z} \subseteq I_{H\overline{H}}[\overline{U}]$. Como $V(\overline{H}) \subseteq H_{H\overline{H}}(S)$, a Proposição 6.5 implica que $V(H) \subseteq H_{H\overline{H}}(S)$, uma contradição.

Agora, sejam $\overline{w}, \overline{w}' \in S \cap V(\overline{H})$. Pela construção de $H$, podemos selecionar $\overline{w} \in \overline{U}$ e $\overline{w}' \in V(\overline{G})$. Temos que $\overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z} \cup \{w, w'\} \subseteq I_{H\overline{H}}[\overline{w}, \overline{w}']$. Consequentemente,

$\overline{U} \subseteq I_{H\overline{H}}[\bar{Z}]$ e $V(\overline{G}) \subseteq I_{H\overline{H}}[\bar{X}]$. Como $V(\overline{H}) \cup \{w, w'\} \subseteq H_{H\overline{H}}(S)$, a Proposição 6.5 implica que $V(H) \subseteq H_{H\overline{H}}(S)$, uma contradição. □

**Afirmação 2.** *Seja $S$ um conjunto convexo próprio de $H\overline{H}$. Então $S \cap V(\overline{H})$ é uma clique.*

*Prova da Afirmação 2.* Por contradição, suponha que existem $\overline{w}, \overline{w}' \in S \cap V(\overline{H})$ tais que $\bar{w}\bar{w}' \notin E(\overline{H})$. Então, temos os seguintes casos.

**Caso 1.1.** $\overline{w}, \overline{w}' \in \overline{Z}$.

Isso implica que $\overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{U} \subseteq I_{H\overline{H}}[\overline{w}, \overline{w}']$. Consequentemente, $V(\overline{G}) \subseteq I_{H\overline{H}}[\bar{X}]$. Como $d_{H\overline{H}}(\overline{U}, V(\overline{G})) = 3$, pela Afirmação 1, $S$ não é um conjunto convexo próprio, uma contradição.

**Caso 1.2.** $\overline{w}, \overline{w}' \in \overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{U}$.

Neste caso, $\overline{Z} \subseteq I_{H\overline{H}}[\overline{w}, \overline{w}']$, então a prova segue pelo Caso 1.1.

**Caso 1.3.** $\overline{w}, \overline{w}' \in V(\overline{G}) \cup \overline{Z}$.

Temos que $\overline{X} \subseteq I_{H\overline{H}}[\overline{w}, \overline{w}']$, então a prova segue pelo Caso 1.2. □

Seja $S$ um conjunto convexo próprio de $H\overline{H}$ de ordem pelo menos $k + 5n + 3$. Pela Afirmação 2, sabemos que $S \cap V(\overline{H})$ é uma clique. Seja $\overline{C} = S \cap V(\overline{H})$. Prosseguindo, mostramos que $\overline{C} \cap (V(\overline{G}) \cup \overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z}) = \emptyset$. Para tal, agrupamos esta etapa dois casos: $\overline{C}$ não contém vértices de $V(\overline{G}) \cup \overline{Z}$ e $\overline{C}$ não contém vértices de $\overline{X} \cup \overline{Y}$.

**Caso 2.1.** $\overline{C} \cap (V(\overline{G}) \cup \overline{Z}) = \emptyset$.

Suponha, por contradição, que $\overline{C}$ contém um vértice de $V(\overline{G})$ ou de $\overline{Z}$. Se $\overline{C} \cap \overline{X} = \emptyset$ temos que $\overline{X} \subseteq N_{\overline{H}}(\overline{C}) \setminus \overline{C}$. Caso contrário, temos que $\overline{X} \setminus \{\bar{x}_i\} \subseteq N_{\overline{H}}(\overline{C}) \setminus \overline{C}$, para algum $i \in [4n]$. Em ambos os casos, temos que $|N_{\overline{H}}(\overline{C}) \setminus \overline{C}| \geq 4n - 1$. Para $\overline{A} = N_{\overline{H}}(\overline{C}) \setminus \overline{C}$, a Proposição 8.7 implica que $S \cap A = \emptyset$, então $|S \cap V(H)| = |V(H)| - |A| \leq 6n + 4 - (4n - 1) = 2n + 5$.

Até aqui, concluímos que a quantidade de vértices de $S$ em $H$ é no máximo $2n + 5$. Resta ponderar a quantidade máxima de vértices de $S$ em $\overline{H}$. Pela construção de $H$, uma clique em $\overline{H}$ de ordem máxima é um subconjunto próprio de $V(\overline{G}) \cup \overline{Y}$, logo $|S \cap V(\overline{H})| < n + 2$. Consequentemente, $|S| = |S \cap V(H)| + |S \cap V(\overline{H})| < 2n + 5 + n + 2 = 3n + 7$, uma contradição.

**Caso 2.2.** $\overline{C} \cap (\overline{X} \cup \overline{Y}) = \emptyset$.

Sabemos, pelo Caso 2.1, que $\overline{C} \cap (V(\overline{G}) \cup \overline{Z}) = \emptyset$. Por contradição, suponha que $\overline{C}$ contém um vértice de $\overline{X}$ ou de $\overline{Y}$. Seja $\overline{A} = N_{\overline{H}}(\overline{C}) \setminus \overline{C}$. Neste caso, temos que $V(\overline{G}) \cup \overline{Z} \subseteq \overline{A}$. Logo, $|\overline{A}| \geq n + 2$. Segue da Proposição 8.7 que $|S \cap V(H)| = |V(H)| - |A| \leq 6n + 4 - (n + 2) = 5n + 2$.

Como $\overline{C} \cap (V(\overline{G}) \cup \overline{Z}) = \emptyset$, e $\overline{U} \cup \overline{X}$ é um conjunto independente, a ordem máxima de uma clique de $V(\overline{H})$ é $|\overline{Y}| = 2$, então $|S \cup V(\overline{H})| \leq 2$. Isso implica que $|S| = |S \cap V(H)| + |S \cap V(\overline{H})| \leq 5n+2+2 = 5n+4$. Como $k \geq 3$, temos que $|S| \geq k+5n+3 = 5n+6$, uma contradição.

Pelos Casos 2.1 e 2.2, temos que um conjunto convexo próprio $S$ de $H\overline{H}$ de ordem pelo menos $k+5n+3$ é tal que $S \cap \overline{U} \neq \emptyset$ ou $S \cap V(\overline{H}) = \emptyset$. Mostramos que, em ambos os casos, a ordem de $S$ implica em $|S \cap V(G)| \geq k$.

**Caso 3.1.** $S \cap \overline{U} \neq \emptyset$.

Como $\overline{U}$ é um conjunto independente, $|S \cap \overline{U}| \leq 1$. Então, seja $i \in [n]$, e considere que $\overline{u}_i \in S$. Temos que $\overline{A} = N_{\overline{H}}(\overline{u}_i) = \overline{Z}$. Pela Proposição 8.7, $S \cap Z = \emptyset$. Pela construção de $H$, temos que $|U \cup X \cup Y| = 5n+2$. Como $|S \cap V(H)| = |S| - 1 = k+5n+2$, temos que $|S \cap V(G)| \geq k$.

**Caso 3.2.** $S \cap V(\overline{H}) = \emptyset$.

Pela Afirmação 1, temos que

$$\begin{aligned} &\text{ou} \quad S \cap V(H) \subseteq (U \cup V(G) \cup X \cup Y) \quad \text{(I)} \\ &\text{ou} \quad S \cap V(H) \subseteq (U \cup V(G) \cup Z) \quad \text{(II)}. \end{aligned}$$

A condição II implica que $S$ tem ordem no máximo $2n+2$, uma contradição. Então considere que $S \subseteq (U \cup V(G) \cup X \cup Y)$. Ainda pela construção de $H$, $|U \cup X \cup Y| = 5n+2$. Como $|S \cap V(H)| = |S| = k+5n+3$, temos que $|S \cap V(G)| \geq k+1$.

Pelos Casos 3.1 e 3.2 obtemos que $|S \cap V(G)| \geq k$. Resta mostrar que $S \cap V(G)$ é uma clique. Suponha, por contradição, que $S \cap V(G)$ não é uma clique. Então existem $v_1, v_2 \in V(G)$ tais que $v_1v_2 \notin E(G)$. Isso implica que $Z \subseteq I_{H\overline{H}}[v_1, v_2]$. Mas, nos dois casos $S \cap \overline{U} \neq \emptyset$ e $S \cap V(\overline{H}) = \emptyset$, o conjunto $S \cap Z$ é vazio, uma contradição. Portanto $S \cap V(G)$ é uma clique de ordem pelo menos $k$, o que completa a prova.

□

A Figura 8.2 contém um exemplo de grafo $H\overline{H}$ construído para a redução do Teorema 8.10. Cada aresta que liga dois retângulos $A$ e $B$ representa o conjunto de todas as arestas que ligam cada par de vértices $a \in A$ e $b \in B$. Os vértices em preto correspondem ao conjunto convexo $S$ exceto os vértices de $V(G)$.

Por fim, um resumo dos resultados obtidos sobre o número de convexidade geodética se encontra na Tabela 8.1.

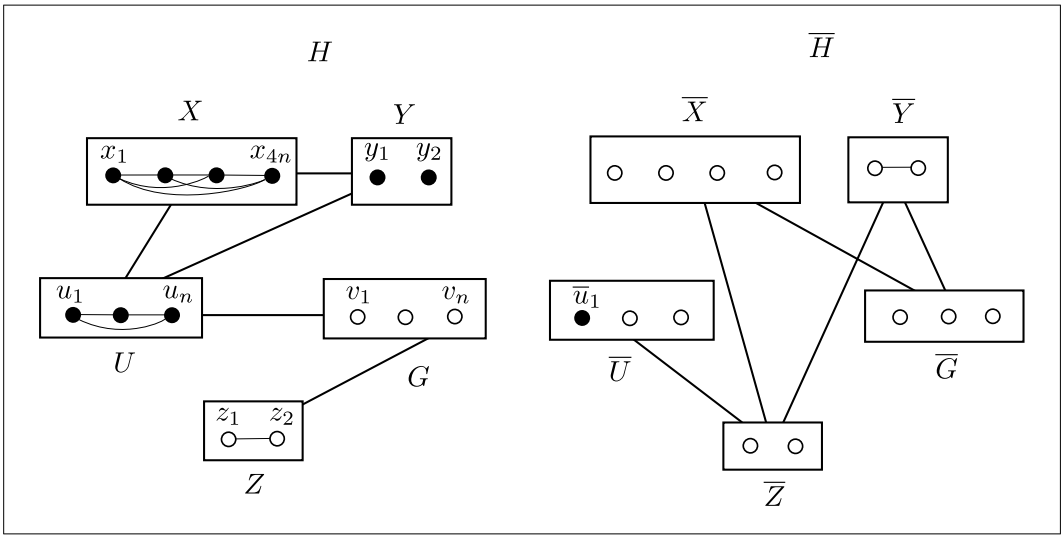



**Figura 8.2:** *Uma ilustração do grafo $H\overline{H}$ construído no Teorema 8.10.*

**Tabela 8.1:** *Resultados obtidos sobre o número de Convexidade Geodética.*

| **Grafos** | **Número de Convexidade Geodética** |
|---|---|
| $G$ qualquer com $diam(G) \neq 3$ | $con(G\overline{G}) \geq n$ (Lema 8.1) |
| $G$ *split* autoconexo | $con(G\overline{G}) \leq 2n - \ell$ (Lema 8.2) |
| $G$ desconexo | $con(G\overline{G}) = 2n - k$ (Teorema 8.5) |
| $G$ cografo | $con(G\overline{G}) = 2n - k$ (Corolário 8.6) |
| Complexidade | NP-completo (Teorema 8.10) |

CAPÍTULO 9

# Conclusões e Trabalhos Futuros

Esta tese se concentrou na família de grafos que podem ser particionados em dois subgrafos complementares. Por um lado, introduzimos uma variante de problema de particionamento associada ao reconhecimento desta família de grafos e, por outro, estudamos alguns parâmetros da convexidade geodética para os grafos prismas complementares, os quais nos motivaram a introdução de tal família.

O problema de particionamento proposto, denominado PARTIÇÃO EM SUBGRAFOS COMPLEMENTARES (COMP-SUB($\Pi$)), recebe como entrada um grafo $H$ e uma propriedade de arestas $\Pi$, e o objetivo é determinar se existe uma decomposição do grafo $H$ em dois subgrafos $G$ e $\overline{G}$ tais que $\overline{G}$ seja o grafo complementar de $G$ e o conjunto de arestas $M$ entre $G$ e $\overline{G}$ satisfaça a propriedade $\Pi$. O problema COMP-SUB($\Pi$) generaliza o reconhecimento dos prismas complementares, que é o caso quando $\Pi$ é um emparelhamento perfeito entre vértices correspondentes de $G$ e $\overline{G}$.

Em relação ao problema introduzido, para COMP-SUB($\Pi$) quando $\Pi$ é uma propriedade qualquer, mostramos resultados para grafos livres de $k$-clique ou $k$-conjunto independente. Além disso, estudamos as seguintes propriedades $\Pi$: quando $M$ é o conjunto vazio, quando $M$ possui todas as arestas possíveis entre $G$ e $\overline{G}$ e quando $M$ é um emparelhamento perfeito.

Sobre a propriedade $\Pi_\emptyset$ que considera $M = \emptyset$, mostramos que COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) é GI-*completo* para grafos gerais e mesmo cordais. Por outro lado, mostramos que o problema pode ser resolvido eficientemente para grafos de permutação, cografos, grafos de comparabilidade, co-comparabilidade e co-intervalo. Além disso, obtivemos caracterizações estruturais para subclasses de grafos cordais, por exemplo, grafos *split*, *starlike*, bloco, intervalo unitário e resultados parciais para grafos fortemente cordais.

Considerando $\Pi_{K_{n,n}}$, o caso em que $M$ possui todas as arestas possíveis entre $G$ e $\overline{G}$, mostramos que muitos dos resultados obtidos para COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) se aplicam para COMP-SUB($\Pi_{K_{n,n}}$). Estes resultados seguem do Lema 3.35 que afirma a equivalência polinomial entre COMP-SUB($\Pi_\emptyset$), em uma classe de grafos $\mathcal{C}$, e COMP-SUB($\Pi_{K_{n,n}}$), na classe complementar de $\mathcal{C}$.

Para $\Pi_{\text{PERF}}$, o caso que considera $M$ como um emparelhamento perfeito, mostra-

mos que o problema COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) é GI-difícil e obtivemos caracterizações quando o grafo $G$ de entrada é um cografo, grafo cordal ou distância-hereditária. Além disso, restringindo o problema um pouco mais, obtivemos um algoritmo polinomial que determina se um grafo de entrada $H$ pode ser particionado em dois cografos complementares.

Na segunda parte da tese, obtivemos resultados para três parâmetros da convexidade geodética para prismas complementares: o número envoltório, o número geodético e o número de convexidade.

Acerca do número envoltório, como uma continuação dos resultados obtidos para prismas complementares $G\overline{G}$ quando $G$ é conexo [90], mostramos alguns limites e igualdades considerando ambos $G$ e $\overline{G}$ conexos. Quando $G$ é um grafo *split*, mostramos que número envoltório é ilimitado. Do contrário, quando $G$ não é um grafo *split*, mostramos que o número envoltório de $G\overline{G}$ é limitado a 3.

A respeito do número geodético, mostramos que o seu problema de decisão relacionado é NP-completo restrito aos prismas complementares. Além disso, obtivemos limites inferiores do número geodético de $G\overline{G}$ quando $G$ ou $\overline{G}$ possuem vértices simpliciais e limites superiores quando $G$ é desconexo e quando os diâmetros de $G$ e $\overline{G}$ são no máximo 3.

Por fim, considerando o número de convexidade, mostramos que o seu respectivo problema de decisão é NP-completo restrito aos prismas complementares. Também estabelecemos um limite inferior considerando prismas complementares de grafos $G$ com diâmetro diferente de 3 e obtivemos uma igualdade quando $G$ é desconexo, o que implicou no resultado para prismas complementares de cografos.

Ainda há o que ser explorado sobre os temas aqui estudados. Sobre o problema COMP-SUB($\Pi$) várias outras propriedades $\Pi$ podem ser examinadas, bem como generalizações do problema COMP-SUB($\Pi$) para mais que dois subgrafos complementares. Um exemplo mais específico seria considerar a propriedade $\Pi_d$, que pode ser definida por considerar o grafo induzido por $M$ como um grafo $d$-regular.

Mencionamos que, até onde sabemos, a complexidade de ISOMORFISMO para grafos *split* livres de $\{sun_3, sun_4, net\}$ e grafos 2-*threshold* são problemas em aberto. Estes problemas poderiam fornecer subsídios para solucionar COMP-SUB($\Pi_\emptyset$) em grafos fortemente cordais, que resolvemos parcialmente.

Sobre COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$), mostramos que este problema é GI-difícil, mas não sabemos sobre a pertinência deste problema na classe GI. Desta forma, uma sugestão de trabalho futuro seria provar a seguinte conjectura.

**Conjectura 9.1** COMP-SUB($\Pi_{\text{PERF}}$) *é* GI-*completo.*

Se tratando da convexidade geodética nos prismas complementares, sugerimos o estudo de outros parâmetros, como o número de Helly [19, 62], o posto [82] e o número

de Radon [57]. Em especial, acreditamos que as ideias apresentadas no Teorema 8.10, sobre a NP-completude de NÚMERO DE CONVEXIDADE, podem ser um ponto de partida para demonstrar a complexidade do posto em prismas complementares, definido a seguir.

Seja $G$ um grafo. Um subconjunto de vértices $S$ de $G$ é *convexamente independente* se, para todo $v \in S$, $v \notin H_G(S \setminus \{v\})$. A cardinalidade do maior conjunto convexamente independente de $G$ é o *posto* de $G$, denotado por $rk(G)$. Neste contexto, concluímos a tese deixando a seguinte conjectura.

**Conjectura 9.2** *Dados um grafo $G$ e um inteiro positivo $k$, decidir se $rk(G\overline{G}) \leq k$ é* NP*-completo.*

# Referências Bibliográficas


[1] ALBENQUE, M.; KNAUER, K. **Convexity in partial cubes: the hull number**. In: *LATIN 2014: Theoretical Informatics*, p. 421–432. Springer, 2014.

[2] ANAND, B. S.; CHANGAT, M.; PETERIN, I.; NARASIMHA-SHENOI, P. G. **Some Steiner concepts on lexicographic products of graphs**. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 6(04):1450060, 2014.

[3] ARAUJO, J.; CAMPOS, V.; GIROIRE, F.; NISSE, N.; SAMPAIO, L.; SOARES, R. **On the hull number of some graph classes**. *Theoretical Computer Science*, 475:1–12, 2013.

[4] ARAÚJO, R. T.; SAMPAIO, R. M.; SZWARCFITER, J. L. **The convexity of induced paths of order three**. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44:109–114, 2013.

[5] ATICI, M. **Computational complexity of geodetic set**. *International journal of computer mathematics*, 79(5):587–591, 2002.

[6] BALOGH, J.; PETE, G. **Random disease on the square grid**. *Random Structures and Algorithms*, 13(3-4):409–422, 1998.

[7] BARBOSA, R. M.; COELHO, E. M. M.; DOURADO, M. C.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **On the Carathéodory number for the convexity of paths of order three**. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(3):929–939, 2012.

[8] BOLLOBÁS, B. **The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis**. Cambridge University Press, 2006.

[9] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. **Graph theory, volume 244 of graduate texts in mathematics**, 2008.

[10] BOOTH, K. S.; COLBOURN, C. J. **Problems polynomially equivalent to graph isomorphism**. Technical Report CS–77–04, University of Waterloo, 1979.

[11] BOOTH, K. S.; LUEKER, G. S. **Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms.** *J. Comput. Syst. Sci.*, 13:335–379, 1976.

[12] BRUNETTI, S.; CORDASCO, G.; GARGANO, L.; LODI, E.; QUATTROCIOCCHI, W. **Minimum weight dynamo and fast opinion spreading**. In: *International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, p. 249–261. Springer, 2012.

[13] BULUÇ, A.; MEYERHENKE, H.; SAFRO, I.; SANDERS, P.; SCHULZ, C. **Recent Advances in Graph Partitioning**, p. 117–158. Springer International Publishing, Cham, 2016.

[14] CÁCERES, J.; HERNANDO, C.; MORA, M.; PELAYO, I. M.; PUERTAS, M. L.; SEARA, C. **On geodetic sets formed by boundary vertices**. *Discrete Mathematics*, 306(2):188–198, 2006.

[15] CÁCERES, J.; MÁRQUEZ, A.; PUERTAS, M. L. **Steiner distance and convexity in graphs**. *European Journal of Combinatorics*, 29(3):726–736, 2008.

[16] CAGAANAN, G. B.; CANOY, S. R. **On the hull sets and hull number of the cartesian product of graphs**. *Discrete Mathematics*, 287(1):141–144, 2004.

[17] CANOY, JR., S. R.; GARCES, I. **Convex sets under some graph operations**. *Graphs and Combinatorics*, 18(4):787–793, Dec 2002.

[18] CAPPELLE, M. R.; PENSO, L.; RAUTENBACH, D. **Recognizing some complementary products**. *Theoretical Computer Science*, 521:1–7, 2014.

[19] CARVALHO JUNIOR, M. T. **O Número de Helly na Convexidade Geodética em Grafos**. PhD thesis, UFRJ/COPPE, 2016.

[20] CASTONGUAY, D.; COELHO, E. M. M.; COELHO, H.; NASCIMENTO, J. R. **A note on the convexity number for complementary prisms**. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 21 no. 4, July 2019.

[21] CASTONGUAY, D.; COELHO, E. M. M.; COELHO, H.; NASCIMENTO, J. R. **On the geodetic number of complementary prisms**. *Information Processing Letters*, 144:39 – 42, 2019.

[22] CASTONGUAY, D.; COELHO, E. M. M.; COELHO, H.; NASCIMENTO, J. R. **On the convexity number for complementary prisms**. In: *Abstracts Latin American Workshop on Cliques in Graphs*, volume 1, p. 44, 2018.

[23] CASTONGUAY, D.; COELHO, E. M. M.; COELHO, H.; NASCIMENTO, J. R. **Sobre o número envoltório de prismas complementares de grafos conexos $G$ e $\overline{G}$**. In: *Anais do L Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, volume 1, p. 1–10, 2018.

[24] CENTENO, C. C.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D.; DE SÁ, V. G. P. **Geodetic number versus hull number in $P_3$-convexity**. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(2):717–731, 2013.

[25] CENTENO, C. C.; COELHO, E. M. M.; DOURADO, M. C.; SZWARCFITER, J. L. **On the l-neighborhood convexity**. *Matemática Contemporânea*, 44:1–12, 2015.

[26] CENTENO, C. C.; DANTAS, S.; DOURADO, M. C.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **Convex partitions of graphs induced by paths of order three**. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 12(5):175, 2010.

[27] CENTENO, C. C.; DOURADO, M. C.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **Irreversible conversion of graphs**. *Theoretical Computer Science*, 412(29):3693–3700, 2011.

[28] CENTENO, C. C.; DOURADO, M. C.; SZWARCFITER, J. L. **On the convexity of paths of length two in undirected graphs**. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 32:11–18, 2009.

[29] CENTENO, C. C. **A Convexidade $P_3$ para Grafos não Direcionados**. PhD thesis, UFRJ/COPPE, 2012.

[30] CERIOLI, M. R.; SZWARCFITER, J. L. **Characterizing intersection graphs af substars of a star**. *Ars Combinatoria*, 79:21–31, 2006.

[31] CHANGAT, M.; KLAVŽAR, S.; MULDER, H. M. **The all-paths transit function of a graph**. *Czechoslovak mathematical journal*, 51(2):439–448, 2001.

[32] CHANGAT, M.; MATHEW, J. **On triangle path convexity in graphs**. *Discrete Mathematics*, 206(1):91–95, 1999.

[33] CHANGAT, M.; PRASANTH, G.; MELERO, P.; MANUEL, I. **The longest path transit function of a graph and betweenness**. *Utilitas mathematica*, 82:111–127, 2010.

[34] CHARTRAND, G.; HARARY, F.; ZHANG, P. **On the geodetic number of a graph**. *Networks*, 39(1):1–6, 2002.

[35] CHARTRAND, G.; WALL, C. E.; ZHANG, P. **The convexity number of a graph**. *Graphs and Combinatorics*, 18(2):209–217, 2002.

[36] CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **The Steiner number of a graph**. *Discrete Mathematics*, 242(1):41–54, 2002.

[37] CHEPOI, V. **Separation of two convex sets in convexity structures**. *Journal of Geometry*, 50(1-2):30–51, 1994.

[38] CHUNG, F. R. K. **On the cutwidth and the topological bandwidth of a tree**. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 6(2):268–277, 1985.

[39] CHURCHLEY, R.; HUANG, J. **On the polarity and monopolarity of graphs**. *Journal of Graph Theory*, 76(2):138–148, 2014.

[40] COELHO, E. M. M.; DOURADO, M. C.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **The Carathéodory number of the $P_3$ convexity of chordal graphs**. *Discrete Applied Mathematics*, 172:104 – 108, 2014.

[41] COELHO, E. M. M.; DOURADO, M. C.; SAMPAIO, R. M. **Inapproximability results for graph convexity parameters**. *Theoretical Computer Science*, 600:49 – 58, 2015.

[42] COLBOURN, C. J. **On testing isomorphism of permutation graphs.** *Networks*, 11:13–21, 1981.

[43] CORNEIL, D. G.; PERL, Y.; STEWART, L. K. **A linear recognition algorithm for cographs**. *SIAM Journal on Computing*, 14(4):926–934, 1985.

[44] CORNEIL, D.; LERCHS, H.; BURLINGHAM, L. **Complement reducible graphs**. *Discrete Applied Mathematics*, 3(3):163 – 174, 1981.

[45] CYGAN, M.; FOMIN, F. V.; KOWALIK, Ł.; LOKSHTANOV, D.; MARX, D.; PILIPCZUK, M.; PILIPCZUK, M.; SAURABH, S. **Parameterized algorithms**, volume 4. Springer, 2015.

[46] DIESTEL, R. **Graph theory**. *Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Heidelberg*, 173, 2005.

[47] DOMINGOS, P.; RICHARDSON, M. **Mining the network value of customers**. In: *Proceedings of the Seventh ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, KDD '01, p. 57–66, New York, NY, USA, 2001. ACM.

[48] DOURADO, M. C.; GIMBEL, J. G.; KRATOCHVÍL, J.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. **On the computation of the hull number of a graph**. *Discrete Mathematics*, 309(18):5668–5674, 2009.

[49] DOURADO, M. C.; OLIVEIRA, R. A.; PROTTI, F. **Algorithmic aspects of Steiner convexity and enumeration of Steiner trees**. *Annals of Operations Research*, 223(1):155–171, 2014.

[50] DOURADO, M. C.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D. **On the geodetic hull number of $P_k$-free graphs**. *Theoretical Computer Science*, 640:52–60, 2016.

[51] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **On the hull number of triangle-free graphs**. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(4):2163–2172, 2010.

[52] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **Some remarks on the geodetic number of a graph**. *Discrete Mathematics*, 310(4):832–837, 2010.

[53] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **On the convexity number of graphs**. *Graphs and Combinatorics*, 28(3):333–345, 2012.

[54] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. **Complexity results related to monophonic convexity**. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12):1268–1274, 2010.

[55] DOURADO, M. C.; RAUTENBACH, D.; DOS SANTOS, V. F.; SCHÄFER, P. M.; SZWARCFITER, J. L. **On the Carathéodory number of interval and graph convexities**. *Theoretical Computer Science*, 510:127–135, 2013.

[56] DOURADO, M. C.; DE SÁ, V. G. P.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **Near-linear-time algorithm for the geodetic radon number of grids**. *Discrete Applied Mathematics*, 210:277–283, 2016.

[57] DOURADO, M. C.; RAUTENBACH, D.; DE SÁ, V. G. P.; SZWARCFITER, J. L. **On the geodetic radon number of grids**. *Discrete Mathematics*, 313(1):111–121, 2013.

[58] DRAGAN, F. F.; NICOLAI, F.; BRANDSTÄDT, A. **Convexity and HHD-free graphs**. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 12(1):119–135, 1999.

[59] DREYER, P. A.; ROBERTS, F. S. **Irreversible k-threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion**. *Discrete Applied Mathematics*, 157(7):1615–1627, 2009.

[60] DUARTE, M. A. **Sobre convexidade em prismas complementares**. PhD thesis, Universidade Federal de Goiás, 2015.

[61] DUARTE, M. A.; PENSO, L.; RAUTENBACH, D.; DOS SANTOS SOUZA, U. **Complexity properties of complementary prisms**. *Journal of Combinatorial Optimization*, p. 1–8, 2015.

[62] DUCHET, P. **Convex sets in graphs, II. minimal path convexity**. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44(3):307–316, 1988.

[63] EKIM, T.; EREY, A.; HEGGERNES, P.; VAN'T HOF, P.; MEISTER, D. **Computing minimum geodetic sets of proper interval graphs**. In: *LATIN 2012: Theoretical Informatics*, p. 279–290. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[64] ERDÖS, P.; FRIED, E.; HAJNAL, A.; MILNER, E. **Some remarks on simple tournaments**. *Algebra Universalis*, 2(1):238–245, 1972.

[65] EVERETT, M. G.; SEIDMAN, S. B. **The hull number of a graph**. *Discrete Mathematics*, 57(3):217–223, 1985.

[66] FARBER, M.; JAMISON, R. E. **Convexity in graphs and hypergraphs**. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(3):433–444, 1986.

[67] FARBER, M.; JAMISON, R. E. **On local convexity in graphs**. *Discrete Mathematics*, 66(3):231–247, 1987.

[68] FEDER, T.; HELL, P.; KLEIN, S.; MOTWANI, R. **Complexity of graph partition problems**. In: *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing*, p. 464–472. ACM, 1999.

[69] FLOCCHINI, P.; LODI, E.; LUCCIO, F.; PAGLI, L.; SANTORO, N. **Irreversible dynamos in tori**. In: *European Conference on Parallel Processing*, p. 554–562. Springer, 1998.

[70] FLOCCHINI, P.; LODI, E.; LUCCIO, F.; PAGLI, L.; SANTORO, N. **Dynamic monopolies in tori**. *Discrete applied mathematics*, 137(2):197–212, 2004.

[71] FOLDES, S.; HAMMER, P. L. **Split graphs**. In: *Proceedings 8th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Louisiana State University, Baton Rouge, LA*, p. 311–315, 1977.

[72] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.

[73] GIMBEL, J. **Some remarks on the convexity number of a graph**. *Graphs and Combinatorics*, 19(3):357–361, 2003.

[74] GODDARD, W.; OELLERMANN, O. R. **Distance in graphs**. In: *Structural Analysis of Complex Networks*, p. 49–72. Springer, 2011.

[75] GOLUMBIC, M. C. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**, volume 57. Elsevier, 2004.

[76] HAMMACK, R.; IMRICH, W.; KLAVŽAR, S. **Handbook of Product Graphs**. CRC press, 2011.

[77] HARARY, F. **Graph Theory**. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[78] HARARY, F.; LOUKAKIS, E.; TSOUROS, C. **The geodetic number of a graph**. *Mathematical and Computer Modelling*, 17(11):89–95, 1993.

[79] HARARY, F.; NIEMINEN, J. **Convexity in graphs**. *J. Differential Geom.*, 16(2):185–190, 1981.

[80] HAYNES, T. W.; HENNING, M. A.; SLATER, P. J.; VAN DER MERWE, L. C. **The complementary product of two graphs**. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 51:21–30, 2007.

[81] HERNANDO, C.; JIANG, T.; MORA, M.; PELAYO, I. M.; SEARA, C. **On the Steiner, geodetic and hull numbers of graphs**. *Discrete Mathematics*, 293(1):139–154, 2005.

[82] KANTÉ, M. M.; SAMPAIO, R. M.; DOS SANTOS, V. F.; SZWARCFITER, J. L. **On the geodetic rank of a graph**. *J. Comb*, 8:323–340, 2017.

[83] KEMPE, D.; KLEINBERG, J.; TARDOS, E. **Maximizing the spread of influence through a social network**. In: *Proceedings of the Ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, KDD '03, p. 137–146, New York, NY, USA, 2003. ACM.

[84] KIM, B. K. **A lower bound for the convexity number of some graphs**. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 14(1-2):185–191, 2004.

[85] KÖBLER, J.; SCHÖNING, U.; TORÁN, J. **The graph isomorphism problem: its structural complexity**. Springer Science & Business Media, 2012.

[86] MAHADEV, N. V. R.; PELED, U. N. **Threshold graphs and related topics**, volume 56. Elsevier, 1995.

[87] MATHON, R. **A note on the graph isomorphism counting problem**. *Information Processing Letters*, 8(3):131–136, 1979.

[88] MÜLLER, H.; BRANDSTÄDT, A. **The NP-completeness of Steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs**. *Theoretical Computer Science*, 53(2):257–265, 1987.

[89] MUSTAFA, N. H.; PEKEC, A. **Listen to your neighbors: How (not) to reach a consensus**. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 17(4):634–660, 2004.

[90] NASCIMENTO, J. R. **O Número Envoltório $P_3$ e o Número Envoltório Geodético em Produtos de Grafos**. Master's thesis, Universidade Federal de Goiás, 2016.

[91] ORTIZ, Z. C.; MACULAN, N.; SZWARCFITER, J. L. **Characterizing and edge-colouring split-indifference graphs**. *Discrete applied mathematics*, 82(1-3):209–217, 1998.

[92] PARKER, D. B.; WESTHOFF, R. F.; WOLF, M. J. **On two-path convexity in multipartite tournaments**. *European Journal of Combinatorics*, 29(3):641–651, 2008.

[93] PELAYO, I. M. **Geodesic convexity in graphs**. Springer, 2013.

[94] PELEG, D. **Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: a review**. *Theoretical Computer Science*, 282(2):231–257, 2002.

[95] PENSO, L. D.; PROTTI, F.; RAUTENBACH, D.; DOS SANTOS SOUZA, U. **Complexity analysis of $P_3$-convexity problems on bounded-degree and planar graphs**. *Theoretical Computer Science*, 607:83–95, 2015.

[96] RAMOS, I. D. F. **O posto de uma convexidade de grafos**. Master's thesis, UFRJ/COPPE, 2014.

[97] SANTOS, V. F. D. **Convexidades em Grafos: Intermediações, Parâmetros e Conversões**. PhD thesis, UFRJ/COPPE, 2013.

[98] TAN, P.-N.; STEINBACH, M.; KUMAR, V. **Introdução ao datamining: mineração de dados**. Ciência Moderna, 2009.

[99] VAN DE VEL, M. L. **Theory of convex structures**, volume 50. Elsevier, 1993.

[100] VARLET, J. C. **Convexity in tournaments**. *Bull. Societe Royale des Sciences de Liege*, 45:570–586, 1976.

# Índice Remissivo


**Símbolos**

árvore, 25
  de Steiner, 76

**A**

adjacente, 23
alcançável, 24
algoritmo eficiente, 30
antecessor, 24
aresta, 23
  paralela, 23
autoconexo, 25, 84

**B**

bull, 27

**C**

caminho de triângulos, 75
caminho em um grafo, 24
caminho mínimo, 24
ciclo em um grafo, 25
classe de grafos
  fechada, 33
clique, 25
  máxima, 25
cografo, 26
coloração de vértices própria, 29
Comp-Sub, 37
componente
  não trivial, 25
  trivial, 25
componentes, 25
comprimento, 24
conexo, 25
conflito de arestas, 46
conjunto
  convexo, 21
  independente, 25
conjunto convexo, 107
conjunto de corte, 29
conjunto independente
  máximo, 25
conjuntos convexos, 73
convexamente independente, 118
convexidade, 73
  $P_3$, 21, 75
  $P_3^*$, 75
  $m^3$, 75
  abstrata, 73
  caminhos de triângulos, 75
  de caminhos mais longos, 75
  de intervalo, 74
  de Steiner, 76
  de todos os caminhos, 75
  em grafos, 74
  geodética, 21, 74
  monofônica, 21, 75
corda, 26, 75
  curta, 75
cordal, 26
corte, 29

**D**

decomposição
  complementar, 37

desconexo, 25
diâmetro, 24
distância, 24
distância-hereditária, 28, 60

**E**

emparelhamento, 25
  de corte, 29
  perfeito, 25
espaço de convexidade, 73
estrutura convexa, 73
excentricidade, 24
extremidades, 23

**F**

fecho convexo, 73, 74
floresta, 25
folhas, 25
fortemente cordal, 27
FPT, 30

**G**

geodésica, 24
GI-completo, 30
grafo, 23
  $r$-partido, 25
  autocomplementar, 26
  autoconexo, 25, 84
  bipartido, 25
  bipartido completo, 25
  bipartido cordal, 27
  caminho, 24
  ciclo, 25
  cluster, 26
  complemento, 23
  completo, 25
  cordal, 26
  de comparabilidade, 27
  de intersecção, 29
  de intervalo, 27
  de intervalo unitário, 28
  de permutação, 27
  estrela, 25
  finito, 23
  fortemente cordal, 27
  não orientado, 23
  permutação spit, 28
  simples, 23
  split completo, 28
  starlike, 29
  threshold, 28
  trivial, 23
grafo de componentes, 33
grafo de conflito, 47
grau, 24

**I**

incidente, 23
instância-sim, 29
isomorfismo, 26
isomorfo, 26

**J**

join, 33

**L**

laço, 23
livre de, 26

**M**

maximal, 24
monopolar, 36

**N**

número de convexidade geodética, 107
net, 27

**O**

ordem, 23

**P**

parâmetro, 30

partição
*split*, 31
polar, 36
prisma complementar, 33
produto complementar, 34
propriedade
hereditária, 25

**S**

simplicial, 25
subgrafo, 24
induzido, 24
isométrico, 24
proibido, 26
sun, 27

**T**

tamanho, 24
torneio, 75
transitivamente orientável, 27
tratável por parâmetro fixo, 30
triângulos, 75

**U**

união disjunta, 33

**V**

vértice, 23
correspondente, 33
isolado, 24
não identificado, 65
pendente, 24
simplicial, 25
universal, 26
vetor de conflito, 48
vizinhança
aberta, 24
fechada, 24
vizinho, 23