Projeto e Análise de Algoritmos

Conceitos básicos - Aula 2

Diane Castonguay
diane@inf.ufg.br

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Notações

$\forall$ = para todo

$\exists$ = existe

! = único

$\prod$ = produto

$\sum$ = soma

$\Rightarrow$ = implica

$\Leftrightarrow$ = se e somente se

| = divide

tq = tal que

Notações

$\mathbb{N}$ = conjunto dos inteiros naturais = $\{0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Z}$ = conjunto dos inteiros = $\{0, \pm1, \pm2, ...\}$

$\mathbb{Q}$ = conjunto dos números racionais

$= \{x : \exists\ a, b \in \mathbb{Z}, (b \neq 0)$ tal que $x=a/b\}$

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais

$\mathbb{N}_*$ = conjunto dos naturais positivos = $\{1, 2, ...\}$

$\mathbb{R}^+$ = conjunto dos números reais não-negativos

$= \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Métodos de prova

Prova por Construção

Prova por Contradição

Prova por Indução

Prova por Construção

Muito usado para mostrar a existência de um objeto.

Exemplo:

Dados:

G = (V, E) um grafo

V vértices, finito

E arestas,

aresta = par não ordenado de vértices

Prova por Construção

Exemplo (continuação)

Definições: Seja $\{u, v\} \in E$

Dizemos que u e v são extremidades da aresta.

Um grafo é dito ser 3-regular se
cada vértice do grafo é
a extremidade de exatamente 3 arestas.

Prova por Construção

Exemplo (continuação)

Teorema: Para cada número inteiro par, $n \geq 4$
Existe um grafo 3-regular com n vértices.

Prova e exemplos feitos em sala de aula.

Prova por Contradição

Teorema: O número $\sqrt{2}$ é irracional

Prova feita em sala de aula.

Prova por Indução

Problema:

Seja P uma propriedade.
Queremos ver que P(n) é verdadeira
para todo os inteiros naturais n.

Prova por Indução

BASE

Prove que P(1) é verdadeira

HIPOTESIS DE INDUÇÃO

Suponha que P(k) é verdadeiro
para algum $k \geq 1$

PASSO DE INDUÇÃO

Mostre que P(k+1) é verdadeira

Prova por Indução

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n$$

Teorema

Para todo n inteiro natural, temos que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Notação Assintótica: Definição O

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(\text{ou } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ duas funções.
Dizemos que:

$$f(n) \in O(g(n))$$

se exitem duas constantes positivas

$$c,\ n_0 > 0 \text{ tais que}$$

$$0 \leq f(n) \leq c * g(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Notação Assintótica: Definição Ω

Sejam f, g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(\text{ou } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ duas funções.
Dizemos que:

$$f(n) \in \Omega(g(n))$$

se exitem duas constantes positivas

$$c,\ n_0 > 0 \text{ tais que}$$

$$0 \leq c * g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_0.$$

Notação Assintótica: Definição Θ

Sejam f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\text{ou } \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ duas funções.
Dizemos que:

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

se

$$f(n) \in O(g(n)) \text{ e } f(n) \in \Omega(g(n))$$

Notação: Por abuso de linguagem, dizemos que

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

Funções: Pisos e Tetos

Seja $x \in \mathbb{R}$. Denotamos
o maior inteiro menor que ou igual a x por $\lfloor x \rfloor$ (piso)
e
o menor inteiro maior que ou igual a x por $\lceil x \rceil$ (teto).

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$$

Funções: Pisos e Tetos

Propriedades

Seja $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$$

Sejam $x \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{N}_*$.

$$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil$$

$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$$

$$\lfloor a/b \rfloor \leq (a + (b-1))/b$$

$$\lceil a/b \rceil \leq (a - (b-1))/b$$

Funções: Aritmética modula

Teorema: Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}_*$.

$\exists!\ q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < n$ tais que

$a = qn + r$,

O quociente da divisão de a por n, q, é o piso de a/n.

Notação: $a \text{ div } n = q = \lfloor a/n \rfloor$

O resto da divisão de a por n, r, é dado por $a-\lfloor a/n \rfloor * n$

Notação: $a \text{ mod } n = r = a-\lfloor a/n \rfloor * n$

Funções: Fatoriais

Definição recursiva de n!

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = (n+1)*n!$$

para $n \geq 0$

Exemplo

$$3! = 3*2! = 3*2*1! = 3*2*1*0! = 3*2*1*1$$

$$3! = 6$$

Funções: Fatoriais

Propriedades

$$n! = O(n^n)$$

$$n! = \Omega\left(2^n\right)$$

$$\log(n!) = \Theta\left(n \log n\right)$$

Funções: Polinômios

Um polinômio em n de grau d é dado da forma

$$P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i, \quad a_d \neq 0$$

Dizemos que uma função é limitada polinomialmente se $f(n) = O(n^k)$ para alguma constante k

Funções: Polinômios e Exponenciais

Para todas constantes reais a e b, a >1, temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$$

Conclusão

$n^b = O(a^n)$

Funções: Exponenciais

Para todos os valores $a \neq 0$, m, n reais, temos as seguintes identidades

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = 1/a$$

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Funções: Exponenciais

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Temos que:

$$e^x \geq 1+x$$

$$\text{para } |x| \leq 1,\ 1+x \leq e^x \leq 1+x+x^2$$

$$e^x = 1+x+\Theta(x^2)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Funções: Logaritmos

Notações

$\lg n = \log_2 n$ (logaritmo binário)

$\ln n = \log_e n$ (logaritmo natural)

$\lg^k n = (\lg n)^k$ (exponenciação)

$\lg \lg n = \lg(\lg n)$ (composição)

Funções: Logaritmos

Notações

$$\lg^{(i)} n = \begin{cases} n & \text{se } i = 0 \\ \lg(\lg^{(i-1)} n) & \text{se } i > 0 \text{ e } \lg^{(i-1)} n > 0 \\ \text{indefinido} & \text{se } i > 0 \text{ e } \lg^{(i-1)} n < 0 \\ & \text{ou } \lg^{(i-1)} n \text{ é indefinido} \end{cases}$$

$$\lg^{*} n = \min\{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\} \quad \text{(log estrela)}$$

Funções: Logaritmos

Propriedades

Para todo a > 0, b > 0, c > 0 e n

$$a = b^{\log_b(a)}$$

$$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

$$\log_b a = \log_c a / \log_c b$$

$$a^{\log_b(n)} = n^{\log_b(a)}$$

Funções: Logaritmos

Propriedades

$$\lg^b n = O(n^a)$$

para qualquer constante $a > 0$.

Funções: Somatórias

$$\sum_{i=1}^{n} i*2^i=(n-1)*2^{k+1}+2, \quad para\, k\geq 1$$

$$H(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \quad (H(n)\, é\, o\, k-ésimo\, número\, harmonico)$$

$$\ln n\leq H(n)\leq 1+\ln n$$

$$\sum_{i=1}^{n} H(i)=(n+1)H(n)-n$$

Funções: Somatórias

Dividindo as Somas

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

$$\frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} \leq \frac{8}{9} \quad para\, k \geq 3$$

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=n_0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \leq O(1) + \frac{9}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k = O(1)$$

Funções: Somatórias

Expandindo e Contraindo Somas

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{n(n+1) - (j-1)\,j}{2} \;=\; \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} n(n+1) + \sum_{j=1}^{n} j - j^2$$

$$S_2 = \frac{1}{2} n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1) - \frac{1}{2} S_2$$

$$S_2 = \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1)$$

Funções: Somatórias

Limitando somatórias por integrais

f é uma função monotonicamente crescente , então

$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \;\le\; \sum_{k=m}^{n} f(k) \;\le\; \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx$$

f é uma função monotonicamente decrescente , então

$$\int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \;\le\; \sum_{k=m}^{n} f(k) \;\le\; \int_{m-1}^{n} f(x)\,dx$$